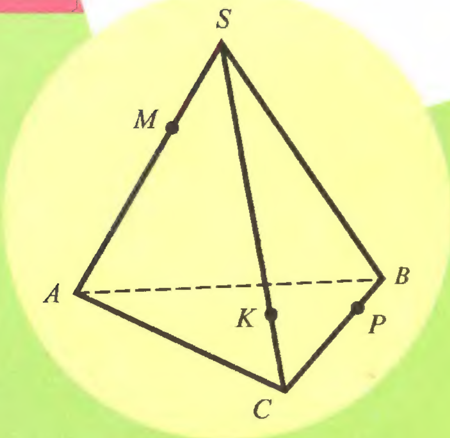
МАТЕМАТИКА

Задачи и упражнения на готовых чертежах



Е.М.Рабинович

ГЕОМЕТРИЯ

10-11 классы

В ПОМОЩЬ СТАРШЕКЛАССНИКАМ, ПРЕПОДАВАТЕЛЯМ
И АБИТУРИЕНТАМ

Е. М. Рабинович

Задачи и упражнения
на готовых чертежах

10-11 классы

ГЕОМЕТРИЯ

«ИЛЕКСА»
«ГИМНАЗИЯ»
Москва—Харьков
2006

Рабинович Е. М.

Задачи и упражнения на готовых чертежах. 10-11 классы. Геометрия.—М.: Илекса, 2006.—80 с.

ISSN 5-89237-068-2

ЛР № 064344 от 9.12.95. Подписано в печать 20.11.02.
Печать офсетная. Формат 70×90/16. Бумага книжно-журнальная.
Тираж 10 000 экз. Заказ 2576.

ООО «Илекса», 121354, г. Москва, а/я 282.
Заказы по телефонам: в Москве (495) 365-30-55

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат».
142300, г. Чехов Московской области,
тел./факс (501) 443-92-17, (272) 6-25-36.
E-mail:marketing@chpk.ru

ISBN 5-89237-068-2

Предисловие

Учитель математики, работающий в старших классах, хорошо знает, как трудно научить учеников делать наглядные и правильные чертежи к стереометрическим задачам.

Из-за недостатка пространственного воображения стереометрическая задача, к которой нужно сделать чертеж самостоятельно, зачастую становится для ученика непосильной.

Именно поэтому использование готовых чертежей к стереометрическим задачам значительно увеличивает объем рассматриваемого на уроке материала, повышает его эффективность.

Предлагаемое пособие является дополнительным сборником задач по геометрии для учащихся 10–11 классов общеобразовательной школы и ориентировано на учебник А.В. Погорелова "Геометрия 7 — 11". Оно является продолжением аналогичного пособия для учащихся 7–9 классов.

Пособие составлено в виде таблиц и содержит более 350 задач. Задачи каждой таблицы соответствуют определенной теме школьного курса геометрии 10–11 классов и расположены внутри таблицы в порядке возрастания их сложности.

В пособии 24 таблицы для 10 класса и 26 таблиц для 11 класса, а также 4 таблицы на повторение курса планиметрии 7–9 классов.

К большинству задач приведены ответы, указания и решения.

Автор надеется, что использование данного пособия будет способствовать развитию пространственного воображения у учащихся и лучшему усвоению материала школьной программы.

Повторение курса планиметрии

Таблица 1. Решение треугольников.

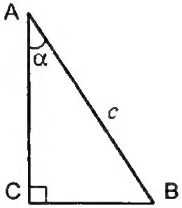
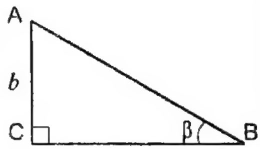
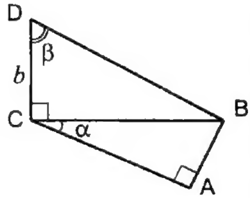
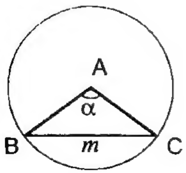
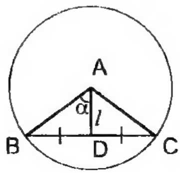
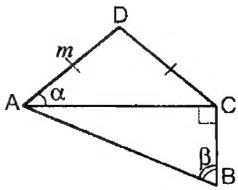
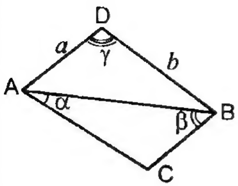
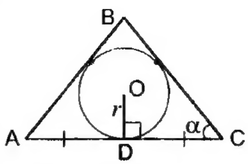
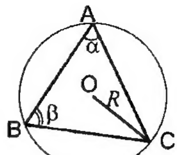
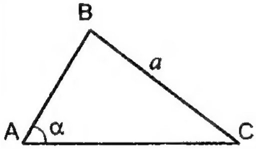
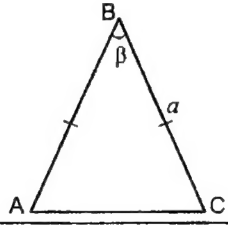
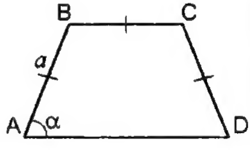
<table>
<tr><td colspan="3">Найти неизвестные стороны и углы ΔABC</td></tr>
<tr>
<td>1
</td>
<td>2
</td>
<td>3
</td>
</tr>
<tr>
<td>4

Дано:
A – центр окружности</td>
<td>5

Дано:
A – центр окружности</td>
<td>6
</td>
</tr>
<tr>
<td>7
</td>
<td>8

Дано: O – центр окружности, вписанной в ΔABC</td>
<td>9

Дано: O – центр окружности, описанной около ΔABC</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">Найти радиус окружности, описанной около ΔABC</td></tr>
<tr>
<td>10
</td>
<td>11
</td>
<td>12

Дано: ABCD – трапеция.</td>
</tr>
</table>

Таблица 2. **Площадь треугольника.**

O – центр окружности, описанной около ΔABC, O_1 – центр окружности, вписанной в ΔABC. Найти площадь ΔABC.

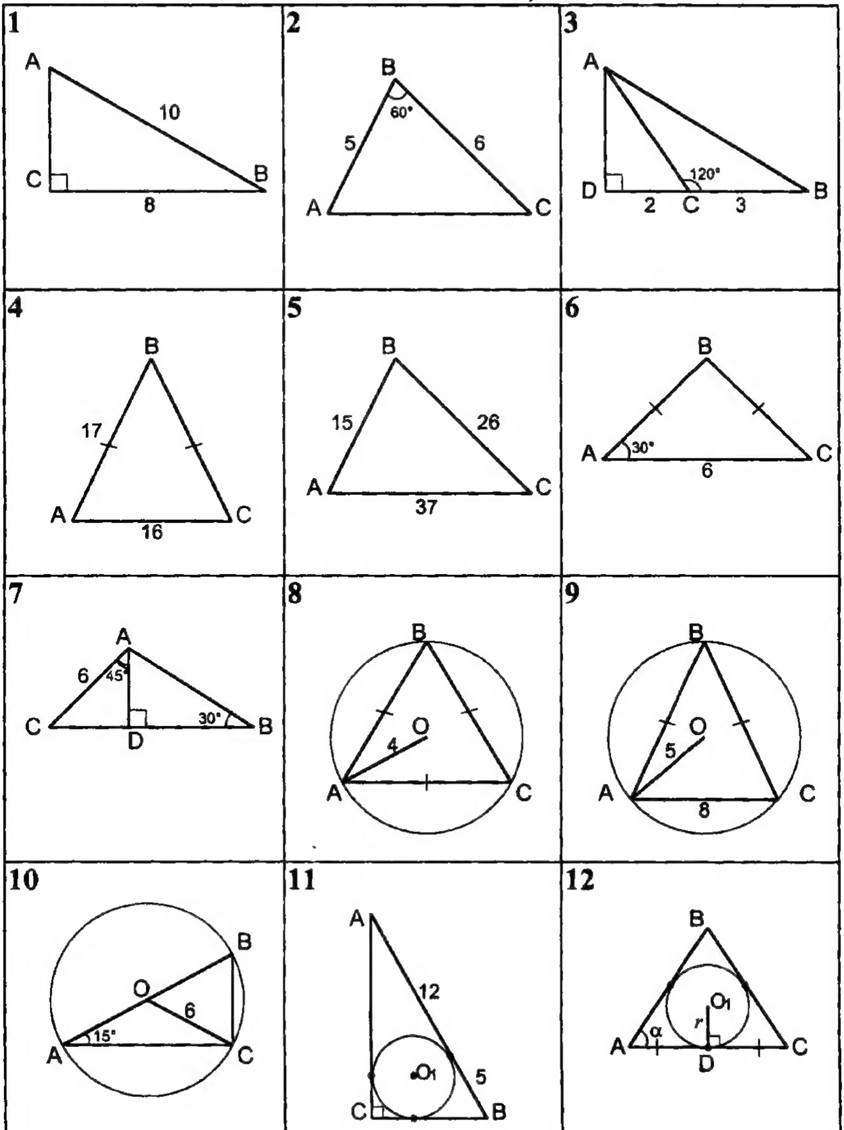


Таблица **3. Площадь четырехугольника.**

O – центр вписанной окружности.
Найти площадь четырехугольника ABCD.

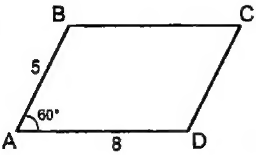
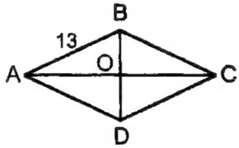
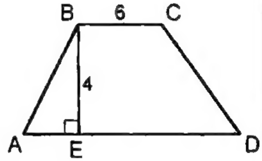
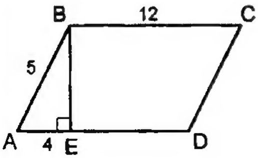
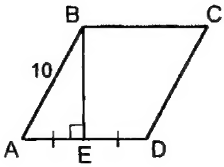
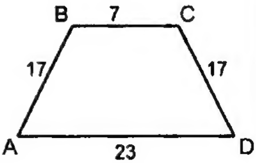
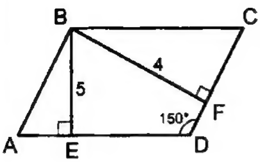
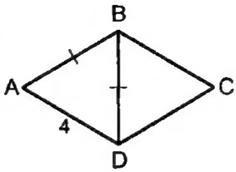
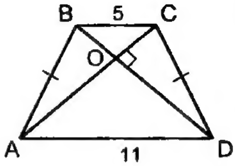
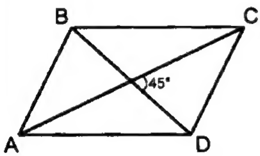
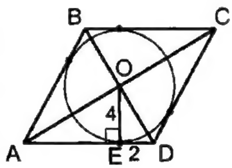
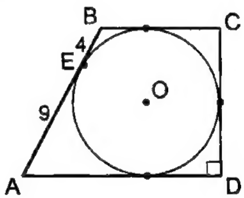
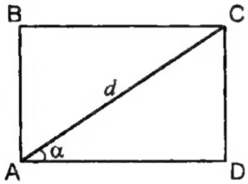
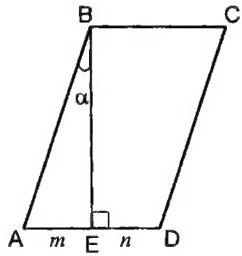
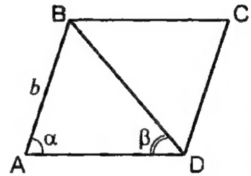
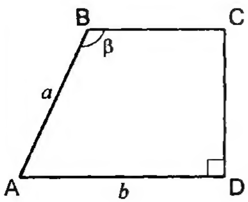
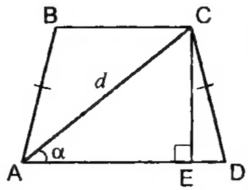
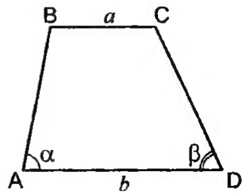
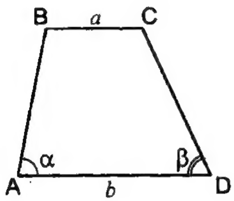
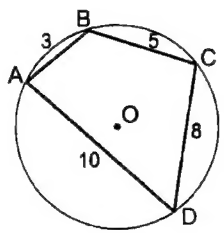
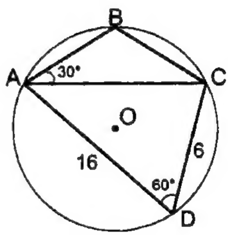
Параллелограмм	*Ромб*	*Трапеция*
1 	**5**  Дано: AC=24	**9**  Дано: AD=10
2 	**6** 	**10** 
3 	**7** 	**11** 
4  Дано: AC=9, BD=8	**8** 	**12** 

Таблица **4. Площадь четырехугольника.**

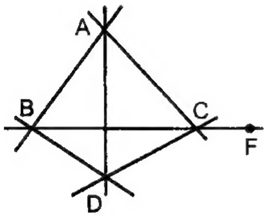
O – центр описанной окружности.
Найти площадь четырехугольника ABCD.

1  Дано: *ABCD* – прямоугольник.	**2**  Дано: *ABCD* – параллелограмм.	**3**  Дано: *ABCD* – параллелограмм.
4  Дано: *ABCD* – трапеция.	**5**  Дано: *ABCD* – трапеция.	**6**  Дано: *ABCD* – трапеция.
7  Дано: *ABCD* – трапеция.	**8** 	**9** 

Стереометрия. 10 класс.

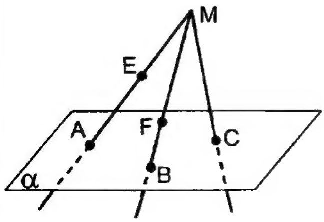
Таблица 10.1. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия.

1



Дано: точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости.
Указать:
1) плоскости, которым принадлежит:
а) прямая AB; б) точка F; в) точка C.
2) прямую пересечения плоскостей:
а) ABC и ACD;
б) ABD и DCF.

2

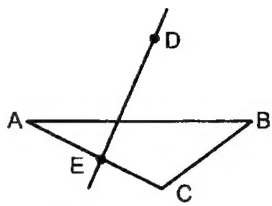


Дано: точка M лежит вне плоскости α, а точки A, B и C принадлежат этой плоскости.
1) Принадлежит ли точка F плоскости α?
2) Указать прямую пересечения плоскостей:
а) α и ABM; б) ABM и BMC.
3) Может ли точка E принадлежать плоскости α?
4) Принадлежит ли прямая AC плоскости MBC?

3

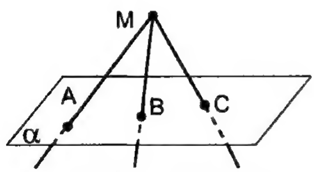
Дано: плоскости α и β пересекаются по прямой a. Может ли точка C принадлежать плоскостям α и β?

4



Дано: точка D лежит вне плоскости ABC. Пересекаются ли прямые DE и BC?

5



Дано: лучи MA, MB и MC лежат в одной плоскости и пересекают плоскость α в точках A, B и C. Доказать, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

Таблица 10.2. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия.

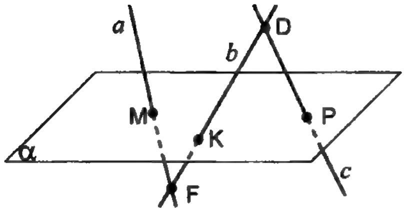
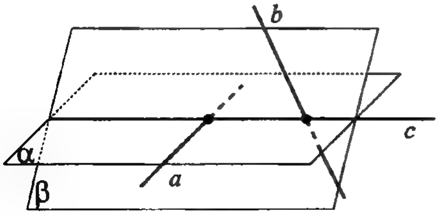
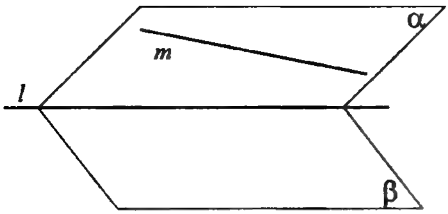
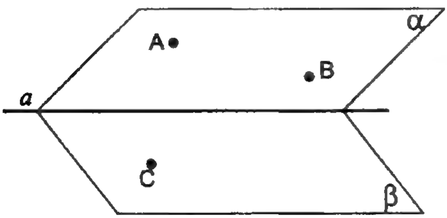
1 	Дано: прямые a, b и c пересекают плоскость α в точках M, K и P. Лежат ли прямые a, b и c в одной плоскости?
2 	Дано: прямая c – линия пересечения плоскостей α и β. Прямые a и b принадлежат плоскостям α и β соответственно. Доказать: прямые a и b не лежат в одной плоскости.
3 	Дано: плоскости α и β пересекаются по прямой l. Прямая m принадлежит плоскости α. Построить точку пересечения прямой m и плоскости β.
4 	Дано: плоскости α и β пересекаются по прямой a. Точки A и B принадлежат плоскости α, а точка C – плоскости β. Построить прямые пересечения плоскости ABC с плоскостями α и β.

Таблица 10.3. Параллельность прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые.

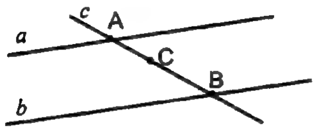
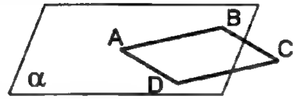
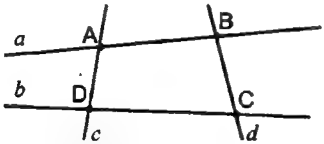
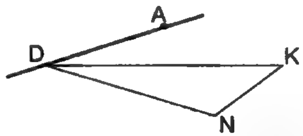
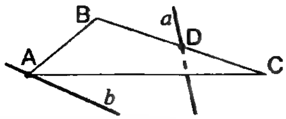
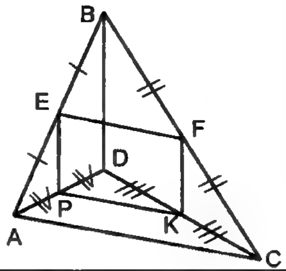
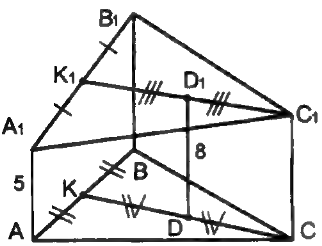
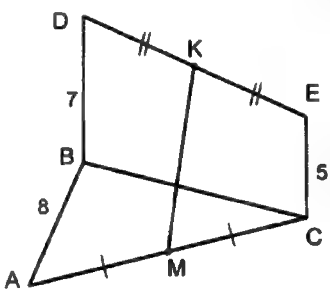
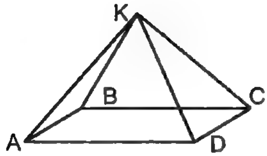
1  Дано: $a \parallel b$. Доказать: a, b и c лежат в одной плоскости.	**2**  Дано: $ABCD$ – параллелограмм. Точки A, B и D лежат в плоскости α. Доказать: точка C лежит в плоскости α.
3  Дано: прямые a и b – скрещивающиеся. Доказать: прямые c и d – скрещивающиеся.	**4**  Дано: точка A лежит вне плоскости DNK. Доказать: прямые AD и NK – скрещивающиеся.
5  Дано: $b \parallel BC$, прямая a не принадлежит плоскости ABC. Доказать: прямые a и b – скрещивающиеся.	**6**  Дано: $ABCD$ – пространственный четырехугольник. AC=16 BD=10 Найти P_{EFKP}
7  Дано: $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. BB_1=9. Найти CC_1	**8**  Дано: $BD \parallel CE$ KM=10 Доказать: точки D и E лежат в плоскости ABC.

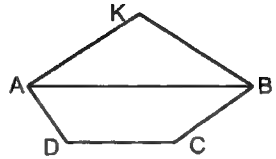
Таблица **10.4. Параллельность прямых и плоскостей.**

1



Дано: точка K лежит вне плоскости параллелограмма *ABCD*. Указать пары параллельных прямых и плоскостей.

2

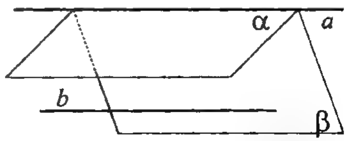


Дано: точка *K* лежит вне плоскости трапеции *ABCD*.
Доказать: *CD* || *AKB*.

3

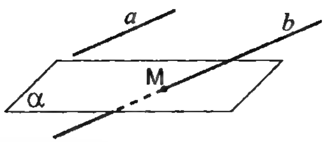
Дано: плоскости α и β пересекаются по прямой ***c***. Прямые ***a*** и ***b*** принадлежат плоскостям α и β соответственно. ***a*** || ***b***. Доказать: ***a*** || ***b*** || ***c***.

4



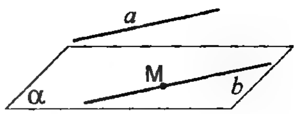
Дано: плоскости α и β пересекаются по прямой ***a***. ***b*** || α, ***b*** || β.
Доказать: ***b*** || ***a***.

5



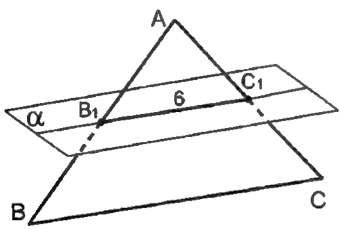
Дано: прямая ***b*** пересекает плоскость α в точке M. ***a*** || ***b***.
Доказать: ***a*** пересекает α.

6



Дано: ***a*** || α, ***a*** || ***b***, M – общая точка плоскости α и прямой ***b***.
Доказать: ***b*** принадлежит α.

7



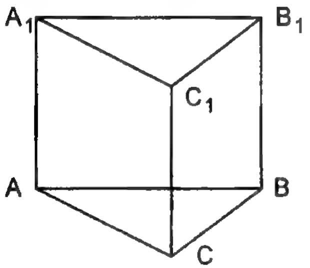
Дано: плоскость α пересекает стороны *AB* и *AC* треугольника *ABC* в точках B_1 и C_1 соответственно.
$B_1C_1 \parallel BC$, $AC_1 : C_1C = 3:4$.

Найти *BC*.

Таблица **10.5. Признак параллельности плоскостей.**

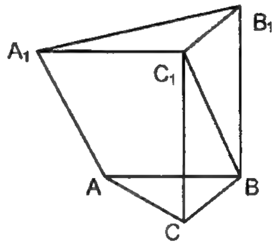
Доказать параллельность плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$:

1



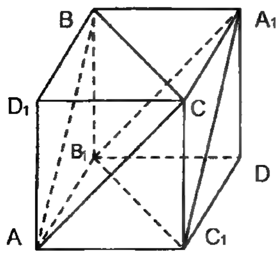
Дано: $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $AA_1=BB_1=CC_1$

2



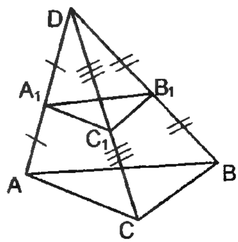
Дано: AA_1C_1B и CC_1B_1B – параллелограммы

3



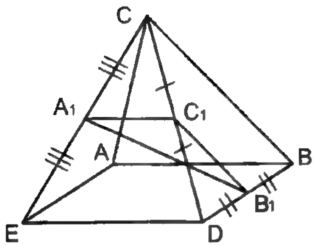
Дано: $AB_1DC_1D_1BA_1C$ куб

4



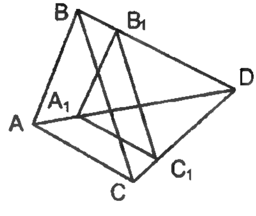
Дано: $ABCD$ – пространственный четырехугольник

5



Дано: точка C лежит вне плоскости параллелограмма $ABCD$

6

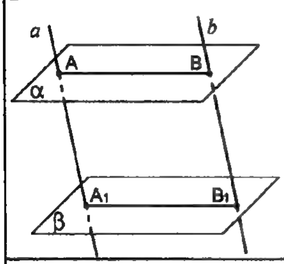


Дано: $ABCD$ – пространственный четырехугольник.
$DA_1 : A_1A = DB_1 : B_1B = DC_1 : C_1C$

Таблица 10.6. **Свойства параллельных плоскостей.**

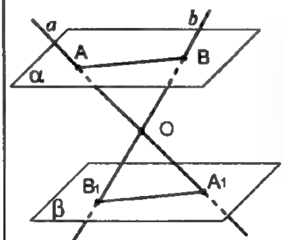
Плоскости α и β параллельны.

1



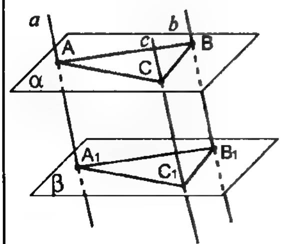
Дано: $a \parallel b$.
Доказать: $AB = A_1B_1$

2



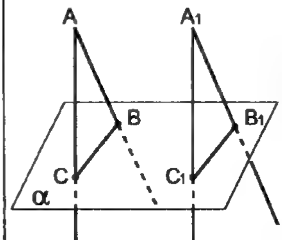
Дано: прямые a и b пересекаются в точке O.
Доказать: $AB \parallel A_1B_1$

3



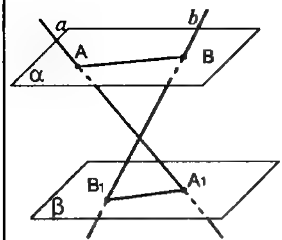
Дано: $a \parallel b \parallel c$.
Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

4



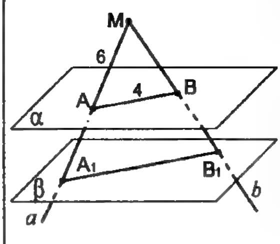
Дано: $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$.
Доказать: $BC \parallel B_1C_1$

5



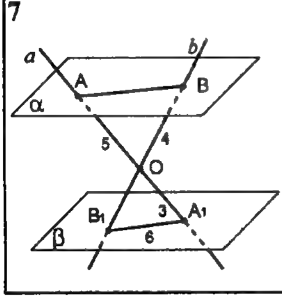
Дано: a и b – скрещивающиеся прямые.
Доказать: прямые AB и A_1B_1 – скрещивающиеся.

6



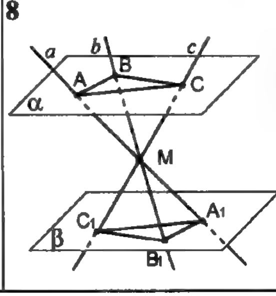
Дано: прямые a и b пересекаются в точке M. $AA_1=3$, $MB_1=12$.
Найти: A_1B_1, MB и BB_1

7



Дано: прямые a и b пересекаются в точке O.
Найти: AB и OB_1

8

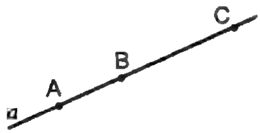


Дано: прямые a и b пересекаются в точке M.
Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Таблица 10.7. Изображение пространственных фигур на плоскости.

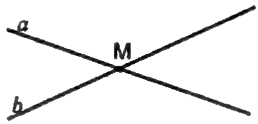
<table>
<tr>
<td>

1



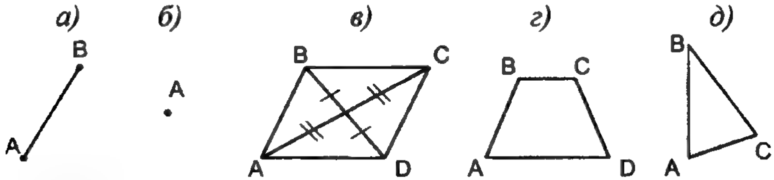
Могут ли точки *A*, *B* и *C* быть параллельными проекциями вершин ΔABC?
</td>
<td>

2



Могут ли прямые a и b быть параллельными проекциями параллельных прямых?
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

3

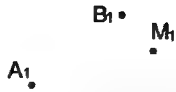


Какая из фигур может быть параллельной проекцией квадрата?
</td>
</tr>
<tr>
<td>

4

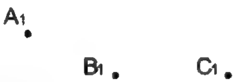
Точки A_1, B_1 и C_1 – параллельные проекции вершин параллелограмма *ABCD*.
Построить проекцию вершины *D*.
</td>
<td>

5



Точки A_1, B_1 и M_1 – параллельные проекции вершин *A* и *B* и точки пересечения медиан ΔABC соответственно.
Построить проекцию вершины *C*.
</td>
</tr>
<tr>
<td>

6



Точки A_1, B_1 и C_1 – параллельные проекции вершин правильного шестиугольника *ABCDEF*.
Построить проекцию шестиугольника.
</td>
<td>

7

Четырехугольник *ABCD* – параллельная проекция прямоугольника.
Построить проекции перпендикуляров, проведенных из точки *M* к сторонам прямоугольника.
</td>
</tr>
</table>

Таблица **10.8. Изображение пространственных фигур на плоскости.**

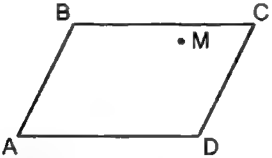
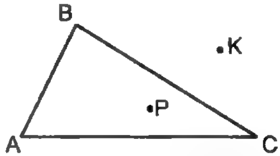
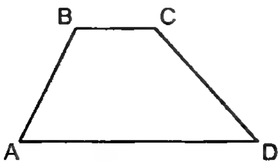
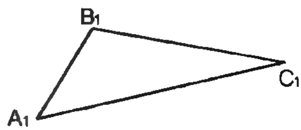
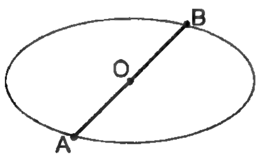
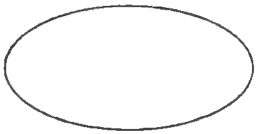
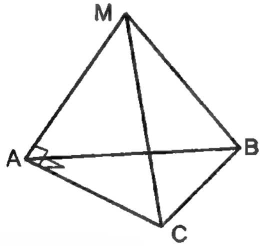
1  Четырехугольник $ABCD$ – параллельная проекция ромба. Построить проекцию перпендикуляра, проведенного из точки M к диагонали BD.	**2**  ΔABC – параллельная проекция равностороннего треугольника. Построить проекции прямых, перпендикулярных сторонам треугольника, проходящих через точки P и K.
3  Четырехугольник $ABCD$ – параллельная проекция равнобокой трапеции. Построить проекцию высоты трапеции, проведенной из вершины B.	**4**  $\Delta A_1B_1C_1$ – параллельная проекция ΔABC, $AC = 2AB$. Построить проекцию биссектрисы $\angle A$.
5  Дана параллельная проекция окружности. AB – проекция ее диаметра. Построить проекцию диаметра, перпендикулярного AB.	**6**  Дана параллельная проекция окружности. Построить проекцию центра окружности.

Таблица **10.9. Перпендикулярность прямой и плоскости.**

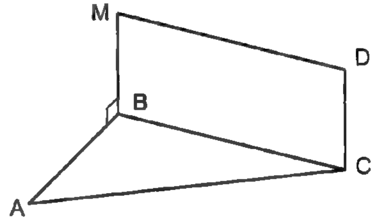
Точка M лежит вне плоскости ABC.

1



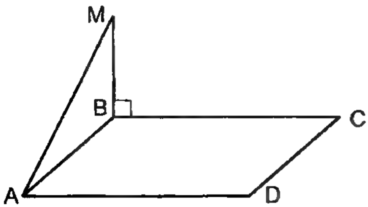
Доказать: прямая *AB* перпендикулярна плоскости *AMC*.

2



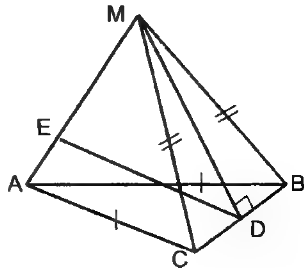
Дано: *BMDC* – прямоугольник.
Доказать: прямая *CD* перпендикулярна плоскости *ABC*.

3



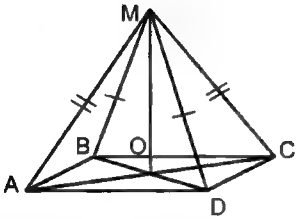
Дано: *ABCD* – прямоугольник.
Доказать: $AD \perp AM$.

4



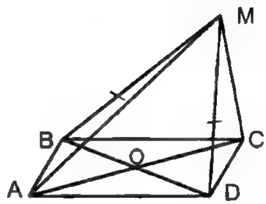
Доказать: $BC \perp DE$.

5



Дано: *ABCD* – параллелограмм.
Доказать: прямая *MO* перпендикулярна плоскости *ABC*.

6

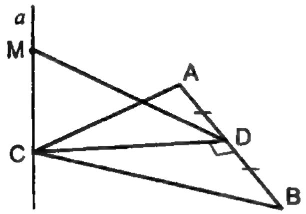


Дано: *ABCD* – ромб.
Доказать: прямая *BD* перпендикулярна плоскости *AMC*.

Таблица 10.10. Перпендикулярность прямой и плоскости.

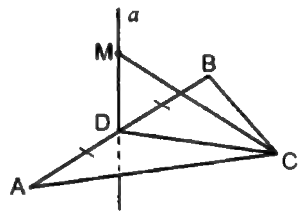
Прямая a перпендикулярна плоскости ABC.

1



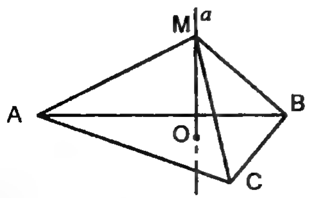
Дано: $\angle ACB=90°$, $AC=4$, $MD=3$.
Найти MC.

2



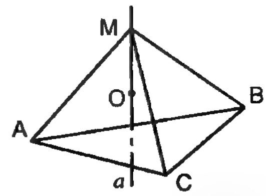
Дано: ΔABC – равносторонний.
$AB=2\sqrt{3}$. $MD=4$.
Найти MC.

3



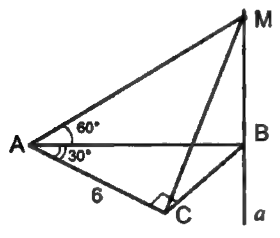
Дано: ΔABC – равносторонний.
$AB=4\sqrt{3}$. O – центр окружности, описанной около ΔABC. $MO=3$.
Найти MB.

4



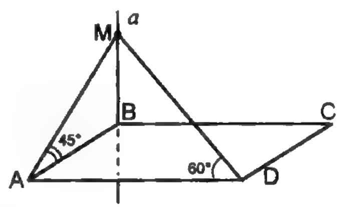
Дано: O – центр окружности, описанной около ΔABC. $\angle ACB=120°$, $AB=6$, $MO=2$.
Найти MC.

5



Найти MB.

6

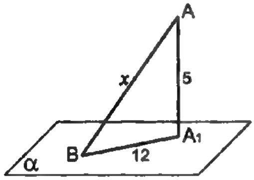


Дано: $ABCD$ – прямоугольник.
$MD=8$.
Найти AB и AD.

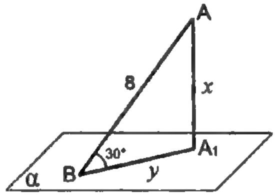
Таблица **10.11. Перпендикуляр и наклонная.**

AA_1 – перпендикуляр к плоскости α, AB и AC – наклонные.
Найти x и y.

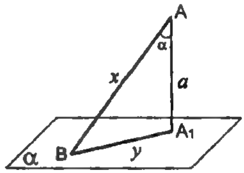
1



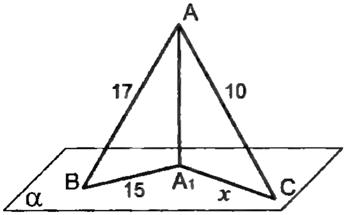
2



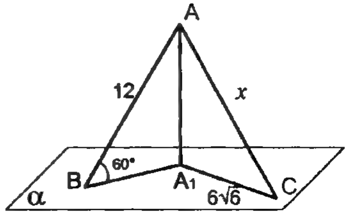
3



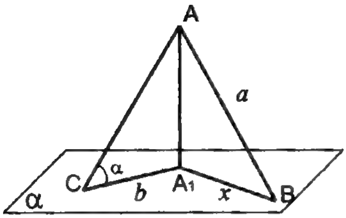
4



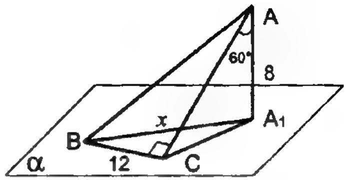
5



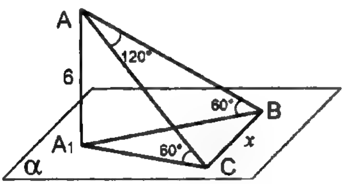
6



7



8



9

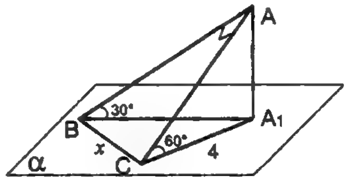
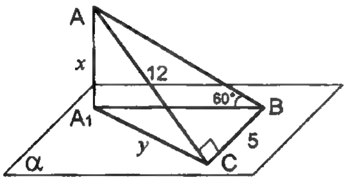


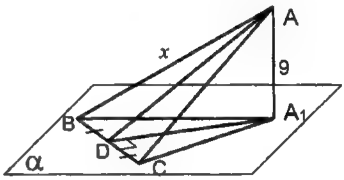
Таблица **10.12. Перпендикуляр и наклонная.**

AA_1 – перпендикуляр к плоскости α, AB и AC – наклонные.
Найти x и y.

1

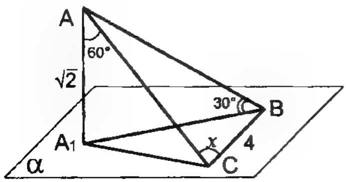


2

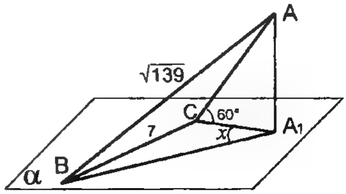


Дано: $BD = 5$, $AD = 15$

3

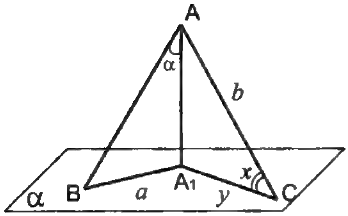


4

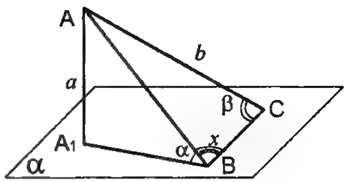


Дано: $AC = 10$

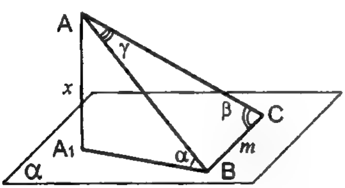
5



6



7



8

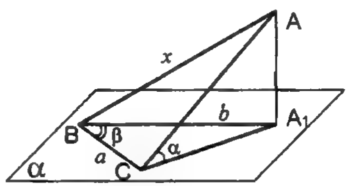
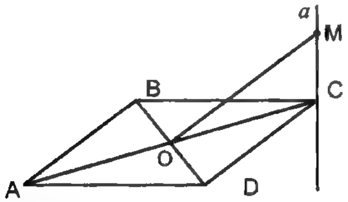


Таблица **10.13. Теорема о трех перпендикулярах.**

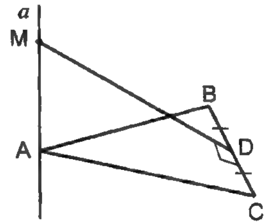
Прямая a перпендикулярна плоскости ABC.

1



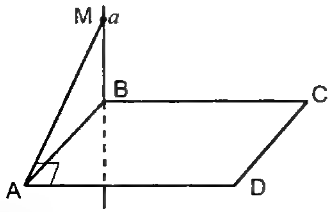
Дано: $ABCD$ – ромб.
Доказать: $MO \perp BD$.

2



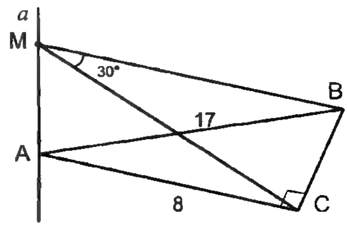
Доказать: $AB = AC$.

3



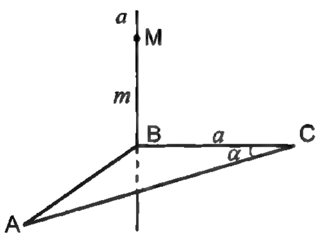
Дано: $ABCD$ – параллелограмм.
Доказать: $ABCD$ – прямоугольник.

4



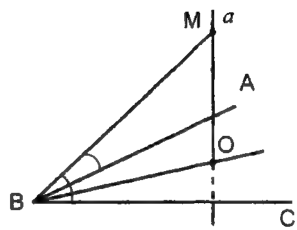
Найти MB.

5



Найти расстояние от точки M до прямой AC.

6

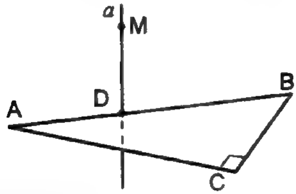


Доказать: BO – биссектриса угла ABC.

Таблица 10.14. **Теорема о трех перпендикулярах.**

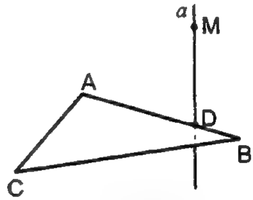
Прямая a перпендикулярна плоскости ABC.

1



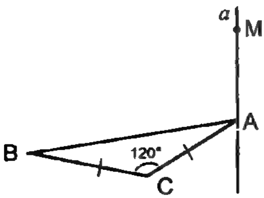
Построить перпендикуляры из точки *M* к прямым *AC* и *BC*.

2



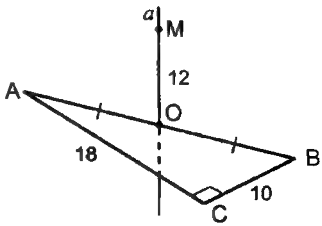
Дано: ΔABC – правильный.
Построить перпендикуляры из точки *M* к прямым *AC* и *BC*.

3



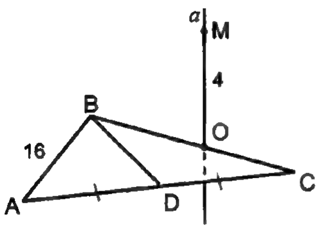
Построить перпендикуляр из точки M к прямой *BC*.

4



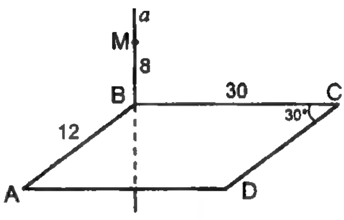
Найти расстояние от точки *M* до прямых *AC* и *BC*.

5



Дано: ΔABC – правильный.
Найти расстояние от точки *M* до прямых *AB* и *BD*.

6

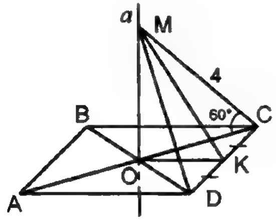


Дано: *ABCD* – параллелограмм.
Найти расстояние от точки *M* до прямых *AD* и *DC*.

Таблица **10.15. Теорема о трех перпендикулярах.**

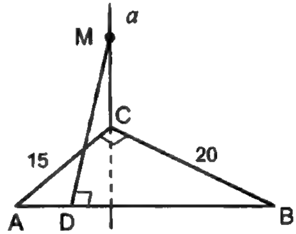
Прямая а перпендикулярна плоскости ABC.

1



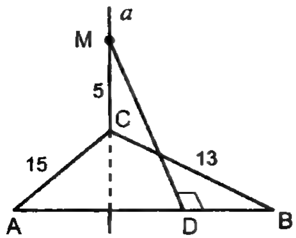
Дано: $ABCD$ – квадрат. Найти MK.

2



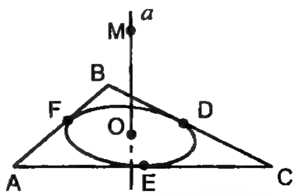
Дано: $MD = 13$. Найти MC.

3



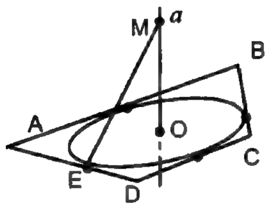
Дано: $AB = 14$. Найти MD.

4



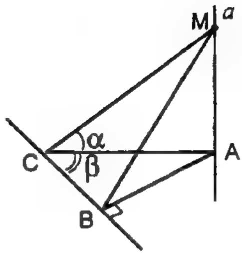
Дано: ΔABC – правильный, O – центр окружности, вписанной в ΔABC, $AB=12$, $OM=4$. Найти расстояние от точки M до прямой BC.

5



Дано: O – центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, $AD=BC$, $CD=9$, $AB=16$, $ME=10$. Найти OM.

6

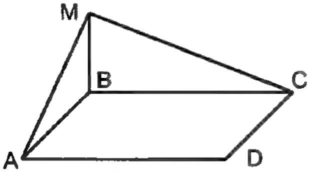


Найти $\angle MCB$.

Таблица **10.16. Перпендикулярность плоскостей.**

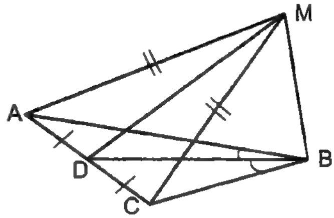
Точка M лежит вне плоскости ABC.

1



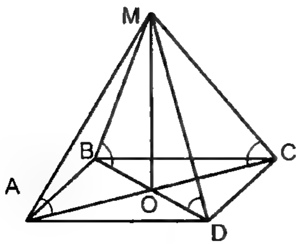
Дано: $ABCD$ – прямоугольник. Прямая MB перпендикулярна плоскости ABC. Доказать перпендикулярность плоскостей AMB и MCB.

2



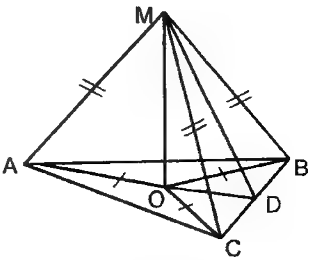
Доказать перпендикулярность плоскостей AMC и DMB.

3



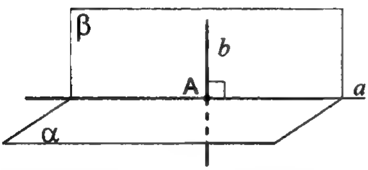
Дано: $ABCD$ – квадрат. Доказать перпендикулярность плоскостей:
1) AMC и ABC; 2) AMC и BMD.

4



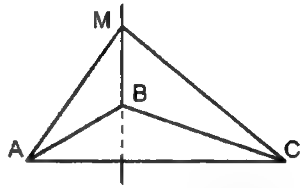
Доказать перпендикулярность плоскостей AMD и ABC.

5



Дано: прямая a – линия пересечения перпендикулярных плоскостей α и β. Прямая b принадлежит плоскости β и перпендикулярна прямой a. Доказать: $b \perp \alpha$.

6

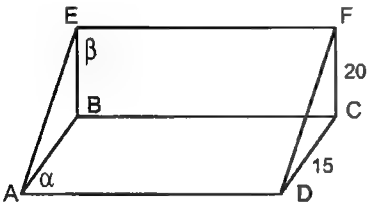


Дано: плоскости AMB и BMC перпендикулярны плоскости ABC. Доказать: прямая MB перпендикулярна плоскости ABC.

Таблица 10.17. **Перпендикулярность плоскостей.**

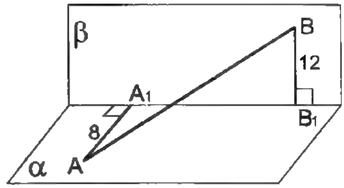
Плоскости α и β перпендикулярны.

1



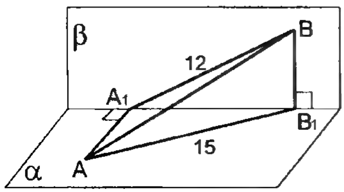
Дано: $ABCD$ и $BCFE$ – прямоугольники. Найти расстояние между прямой BC и плоскостью ADF.

2



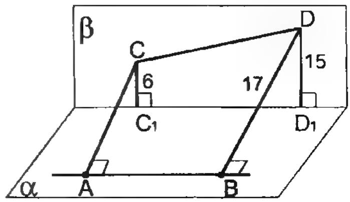
Дано: точки A и B принадлежат плоскостям α и β соответственно. $A_1B_1 = 9$.
Найти AB.

3



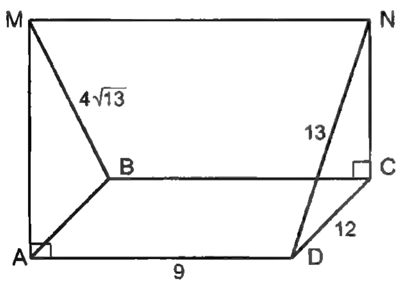
Дано: точки A и B принадлежат плоскостям α и β соответственно. $A_1B_1 = 9$.
Найти AB.

4



Дано: точки A и B принадлежат плоскости α, а точки C и D – плоскости β. $AB \parallel C_1D_1$.
Найти AC.

5



Дано:
$ABCD$ – прямоугольник.
Плоскости AMB и DNC перпендикулярны плоскости ABC.
Найти MN.

Таблица **10.18. Расстояние между скрещивающимися прямыми.**

Прямая a перпендикулярна плоскости ABC. Найти расстояние между прямыми a и AC (рис.1-3).

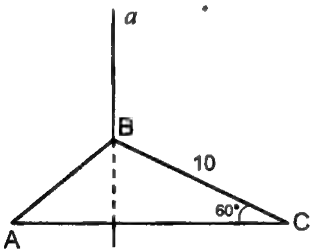
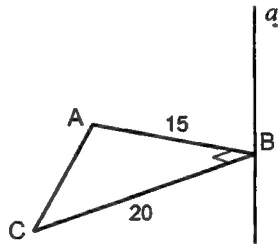
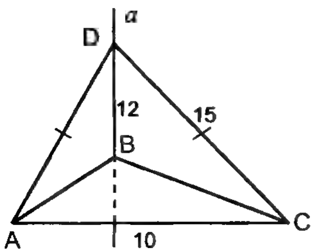
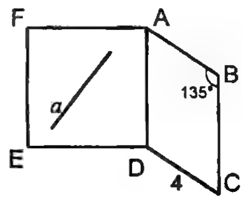
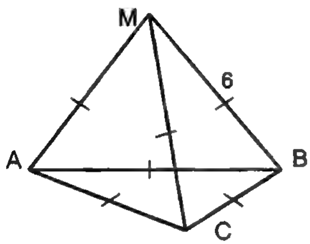
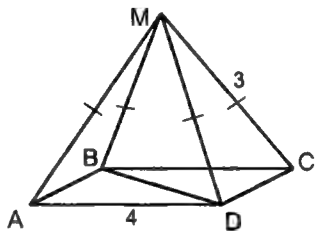
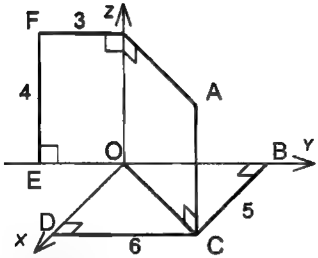
1 	**2** 
3 	**4**  Дано: *ABCD* – параллелограмм. Плоскости *ABC* и *ADE* перпендикулярны. Прямая *a* принадлежит плоскости *ADE*. Найти расстояние между прямыми *a* и *BC*
5  Дано: точка *M* лежит вне плоскости *ABC*. Найти расстояние между прямыми *AC* и *BM*.	**6**  Дано: *ABCD* – квадрат. Точка *M* лежит вне плоскости *ABC*. Найти расстояние между прямыми *AM* и *BD*.

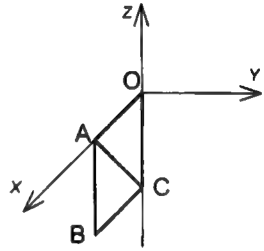
Таблица **10.19. Декартовы координаты в пространстве.**

1



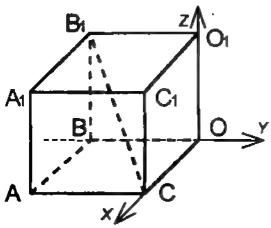
Найти координаты точек *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*

2



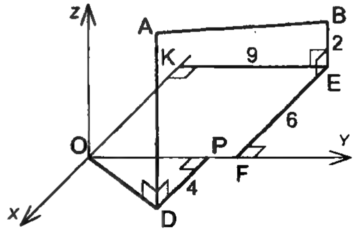
Дано: *ABCO* – квадрат, $AC=2\sqrt{2}$
Найти координаты точек *A*, *B* **и** *C*.

3



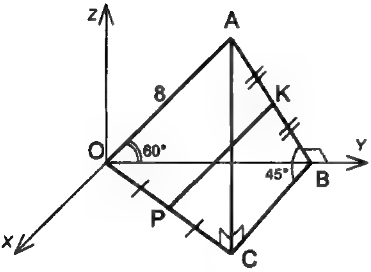
Дано: $ABOCA_1B_1O_1C_1$ – куб.
$B_1C=4\sqrt{3}$.
Найти координаты вершин куба.

4



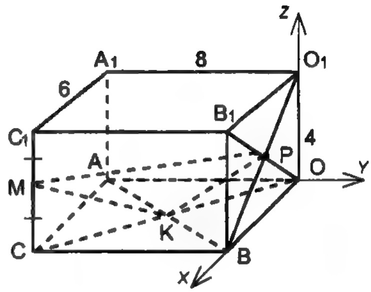
Дано: $OP=7$, $AD=8$.
Найти длину отрезка *AB* **и координаты его середины.**

5



Найти координаты точек *P* **и** *K* **и длину отрезка** *PK*.

6



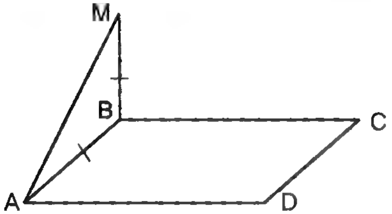
Дано: $AOBCA_1O_1B_1C_1$ – прямоугольный параллелепипед.
Найти периметр ΔMPK.

Таблица **10.20. Угол между скрещивающимися прямыми.**

Прямая MB перпендикулярна плоскости ABC (рис.1-3, 5, 6).

<table>
<tr>
<td>

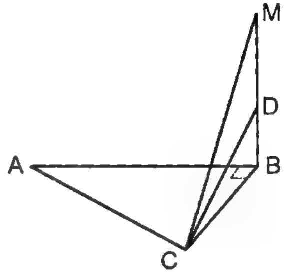
1



Дано: $ABCD$ – прямоугольник.
Найти угол между прямыми:
1) MB и AD; 2) AM и CD;
3) AM и BC.

</td>
<td>

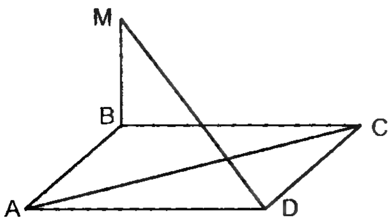
2



Найти угол между прямыми AB и CD.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

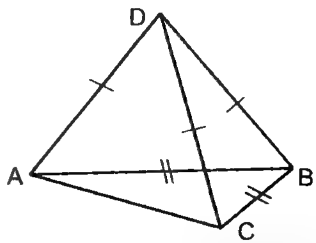
3



Дано: $ABCD$ – ромб. Найти угол между прямыми MD и AC.

</td>
<td>

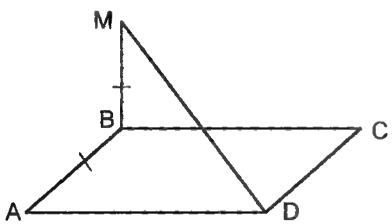
4



Дано: точка D лежит вне плоскости ABC. Найти угол между прямыми AC и BD.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

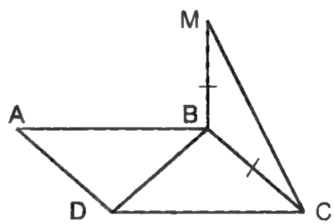
5



Дано: $ABCD$ – квадрат. Найти угол между прямыми MD и BC.

</td>
<td>

6



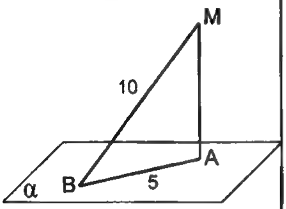
Дано: $ABCD$ – квадрат. Найти угол между прямыми CM и BD.

</td>
</tr>
</table>

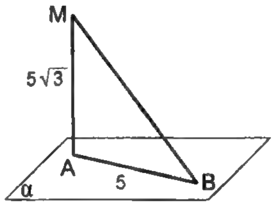
Таблица **10.21. Угол между прямой и плоскостью.**

Прямая МА перпендикулярна плоскости ABC.
Найти угол между прямой МВ и плоскостью ABC (рис. 3-6).

1

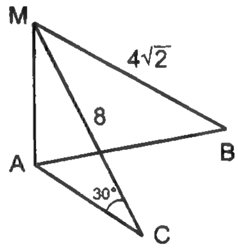


2

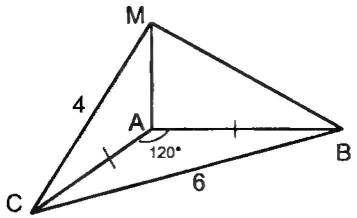


Дано: прямая МА перпендикулярна плоскости α.
Найти угол между прямой МВ и плоскостью α.

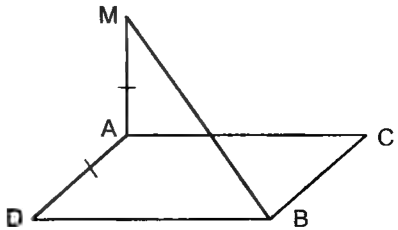
3



4

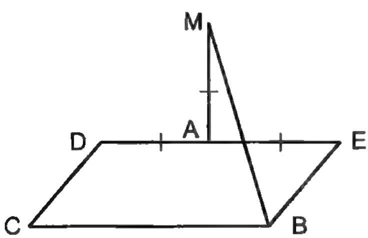


5



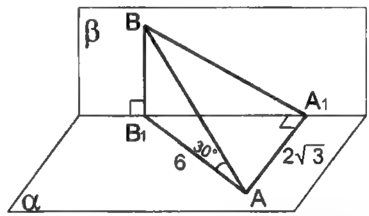
Дано: *ACBD* – квадрат.

6



Дано: *BCDE* – квадрат.

7

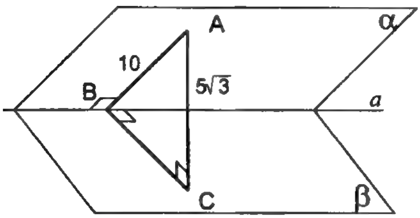


Дано: плоскости α и β перпендикулярны. Найти угол между прямой *AB* и плоскостью β.

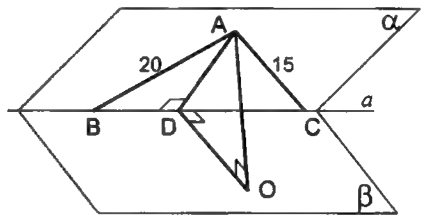
Таблица 10.22. Угол между плоскостями.

Плоскости α и β пересекаются по прямой a.
Найти угол между плоскостями α и β.

1

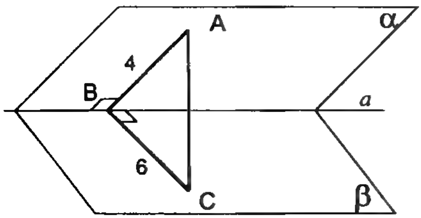


2



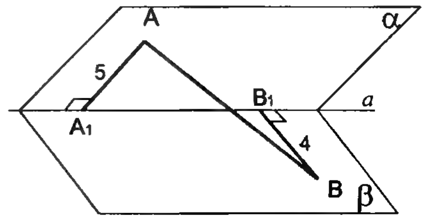
Дано: $\angle BAC = 90°$, $AO = 6$.

3



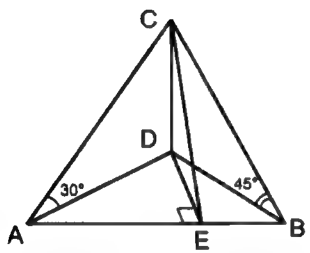
Дано: $AC = 2\sqrt{7}$.

4



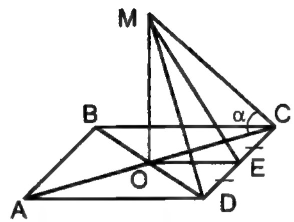
Дано: $AB = 11$, $A_1B_1 = 10$.

5



Дано: прямая CD перпендикулярна плоскости ADB, $\angle ADB = 90°$.
Найти угол между плоскостями ACB и ADC.

6

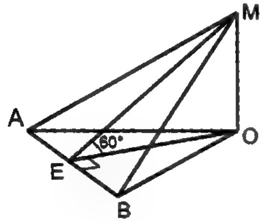


Дано: $ABCD$ – квадрат. Прямая MO перпендикулярна плоскости ABC.
Найти угол между плоскостями MDC и ABC.

Таблица 10.23. Площадь ортогональной проекции многоугольника.

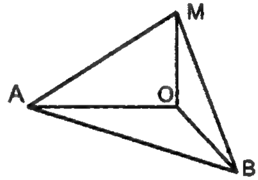
Прямая МО перпендикулярна плоскости АОВ (рис.1-4).

1



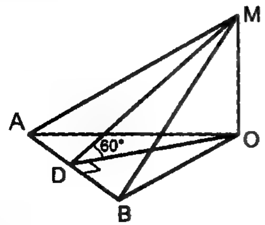
Дано: $S_{AMB} = 8$
Найти S_{AOB}.

2



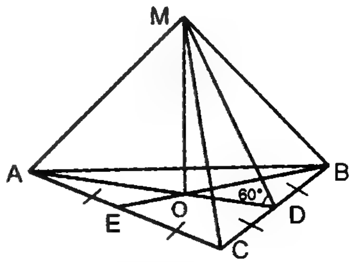
Дано: $S_{AOB} = 8$, $S_{AMB} = 8\sqrt{2}$.
Найти угол между плоскостями *AMB* и *AOB*.

3



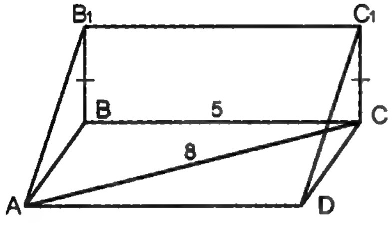
Дано: $AB = 14$, $OB = 15$, $AO = 13$.
Найти S_{AMB}.

4



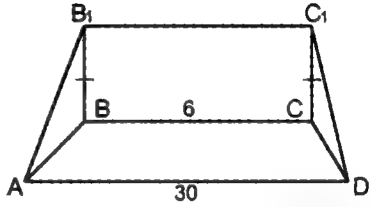
Дано: ΔABC – равносторонний.
$S_{AMC} = Q$. Найти S_{ABC}

5



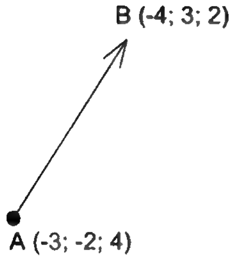
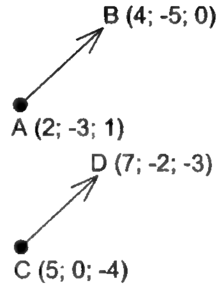
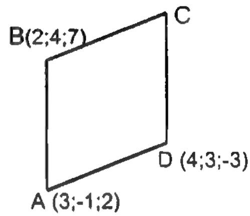
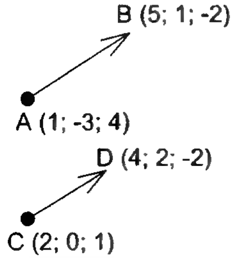
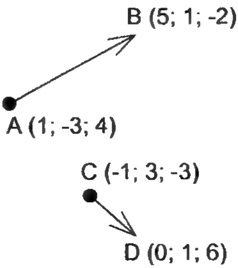
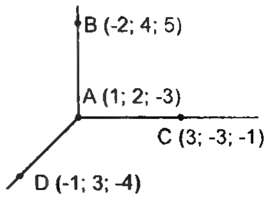
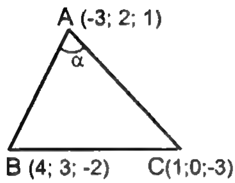
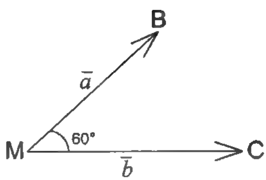
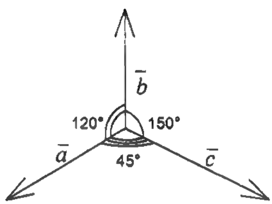
Дано: *ABCD* – ромб. Прямые BB_1 и CC_1 перпендикулярны плоскости *ABC*. $S_{AB_1C_1D} = 24\sqrt{2}$.
Найти угол между плоскостями *ABC* и AB_1C_1.

6



Дано: *ABCD* – трапеция. Прямые BB_1 и CC_1 перпендикулярны плоскости *ABC*. $AB = CD = 15$.
$S_{AB_1C_1D} = 108\sqrt{3}$. Найти угол между плоскостями *ABC* и AB_1C_1.

Таблица **10.24. Векторы в пространстве.**

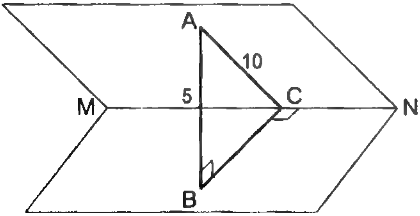
1  Найти $\lvert\overline{AB}\rvert$.	**2**  Равны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$?	**3**  Дано: *ABCD* – параллелограмм. Найти координаты вершины *C*.
4  Коллинеарны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$?	**5**  Перпендикулярны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$?	**6**  Доказать: прямая *AB* перпендикулярна плоскости *ADC*.
7  Найти $\cos\alpha$	**8**  Дано: $\lvert\bar{a}\rvert = 1$, $\lvert\bar{b}\rvert = 2$. Найти: 1) $\lvert\bar{a} + \bar{b}\rvert$ 2) $\lvert\bar{a} - \bar{b}\rvert$ 3) $\lvert 2\bar{a} - 3\bar{b}\rvert$	**9**  Дано: $\lvert\bar{a}\rvert = 2$, $\lvert\bar{b}\rvert = 3$, $\lvert\bar{c}\rvert = 1$. Найти $(\bar{a} + \bar{c})(\bar{b} - \bar{c})$

Стереометрия. 11 класс.

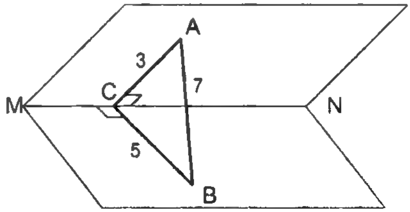
Таблица **11.1. Двугранный угол. Трехгранный угол.**

MN - ребро двугранного угла. Точки A и B лежат в разных гранях двугранного угла (рис.1-4). (abc) - трехгранный угол (рис. 5, 6).

1

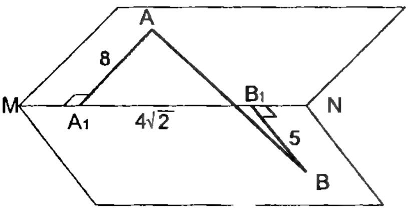


2



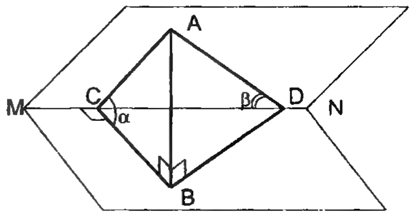
Найти величину двугранного угла.

3



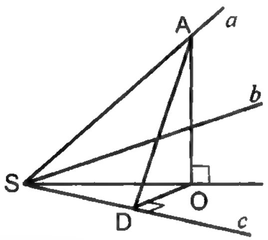
Дано: величина двугранного угла равна 60°. Найти AB.

4



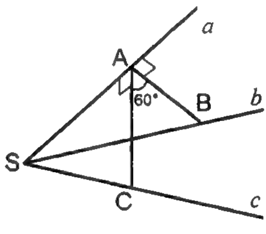
Найти $\angle ADB$.

5



Дано: $\angle(ab) = \angle(ac) = \angle(bc) = 60°$. Найти величину двугранного угла при ребре c.

6

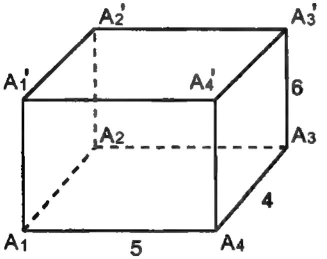


Дано: $\angle(ab) = \angle(ac) = 45°$. Найти $\angle(bc)$.

Таблица 11.2. Прямая призма.

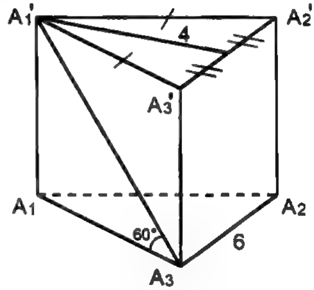
$A_1A_2\ldots A_nA_1'A_2'\ldots A_n'$ – *прямая призма.*

1



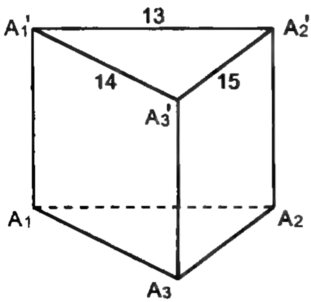
Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – прямоугольник.
Найти: 1) *S*бок; 2) *S*полн.

2



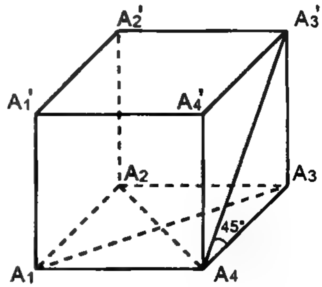
Найти: 1) *S*бок; 2) *S*полн.

3



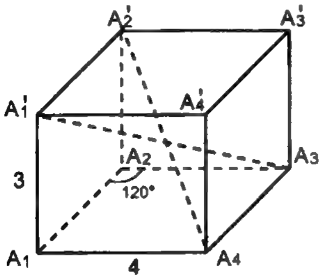
Дано: *S*полн. = 378. Найти A_1A_1'.

4



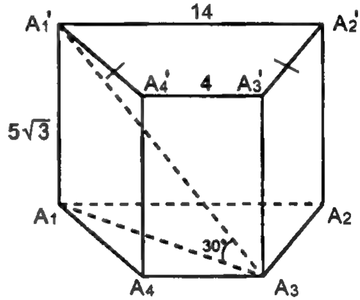
Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – ромб. $A_1A_3 = 24$, $A_2A_4 = 10$. Найти *S*полн.

5



Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – ромб.
Найти: $A_1'A_3$, $A_2'A_4$.

6

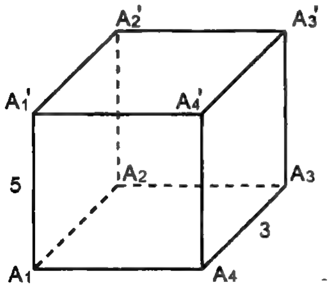


Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – трапеция.
Найти *S*полн.

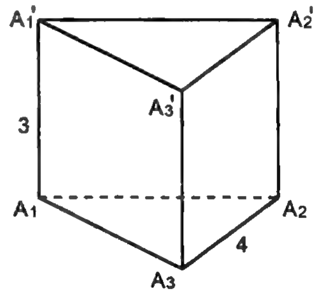
Таблица **11.3. Правильная призма.**

$A_1A_2\ldots A_nA_1'A_2'\ldots A_n'$ – правильная призма.
Найти: 1) площадь боковой поверхности призмы;
2) площадь полной поверхности призмы.

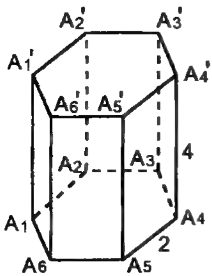
1



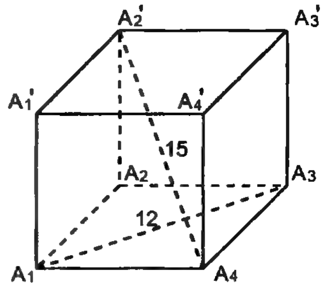
2



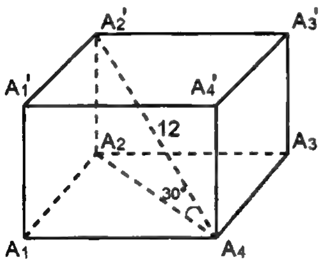
3



4



5



6

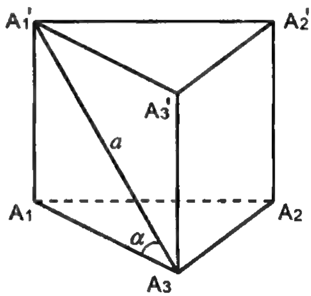


Таблица **11.4. Правильная призма.**

$A_1A_2\dots A_nA_1'A_2'\dots A_n'$ – правильная призма.
Найти: 1) площадь боковой поверхности призмы;
2) площадь полной поверхности призмы.

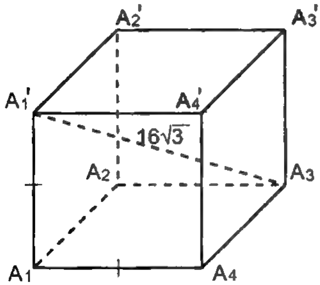
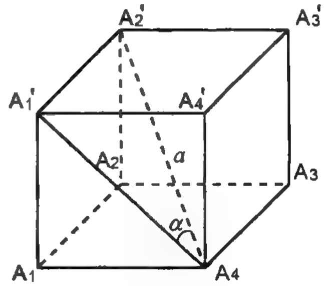
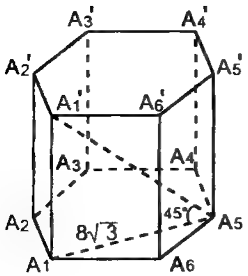
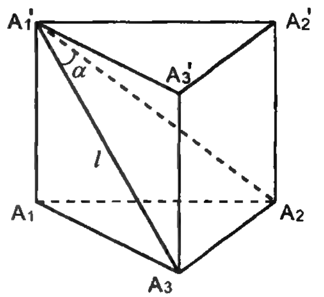
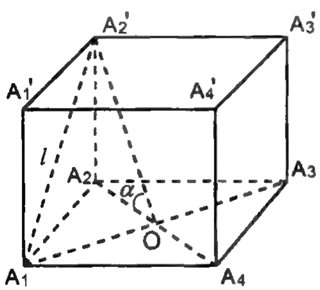
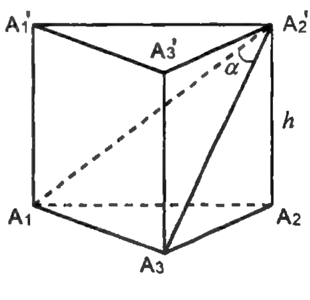
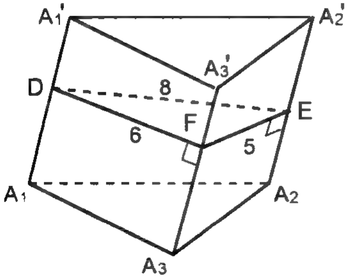
1 	**2** 
3 	**4** 
5 	**6** 

Таблица 11.5. **Наклонная призма.**

$A_1A_2A_3A_1'A_2'A_3'$ – наклонная призма.

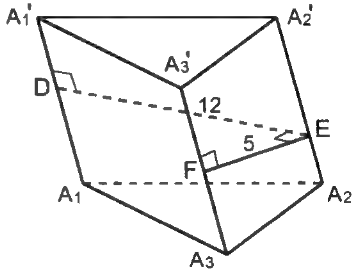
Найти площадь боковой поверхности призмы.

1



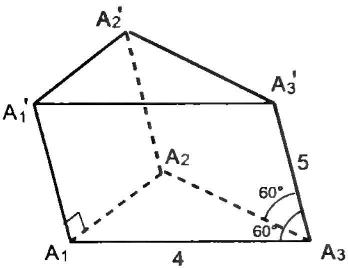
Дано: $A_1A_1' = 4$.

2



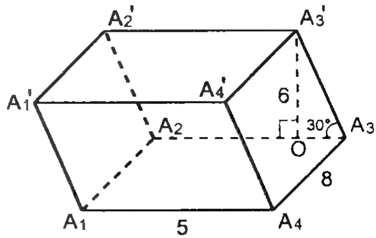
Дано: $A_1A_1' = 10$.

3 (*)



Дано: $\Delta A_1A_2A_3$ – правильный.

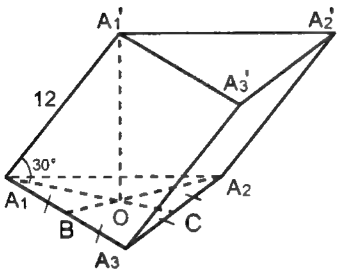
4



Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – прямоугольник.

$A_3'O$ – высота призмы.

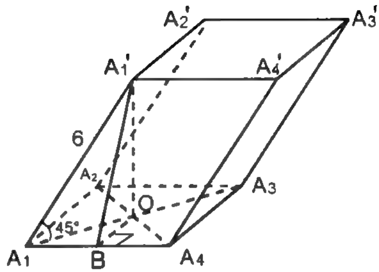
5



Дано: $\Delta A_1A_2A_3$ – правильный.

$A_1'O$ – высота призмы.

6



Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – квадрат.

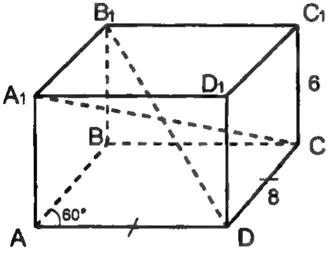
$A_1'O$ – высота призмы.

(*) Попробуйте доказать, что в условии задачи можно не указывать, что $\angle A_1'A_1A_2 = 90°$

Таблица 11.6. Параллелепипед.

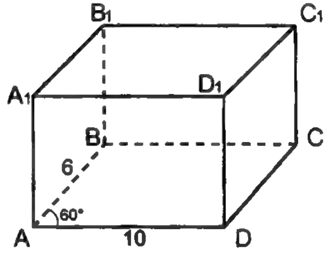
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед.
Найти площадь полной поверхности параллелепипеда (рис. 2-6).

1



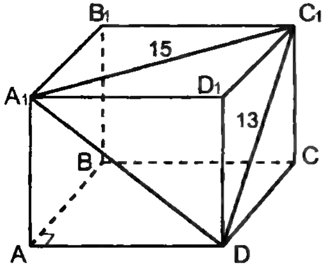
Найти: A_1C, B_1D.

2



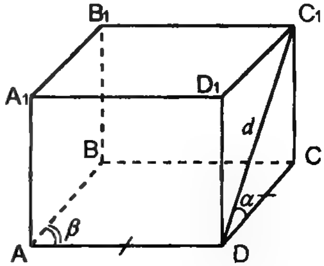
Дано: $AC = B_1D$.

3

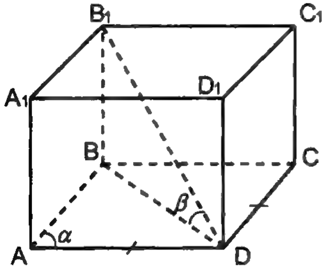


Дано: $A_1D = \sqrt{106}$

4



5



Дано: $B_1D = d$.

6

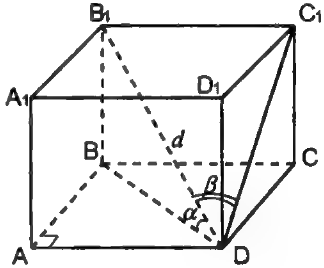
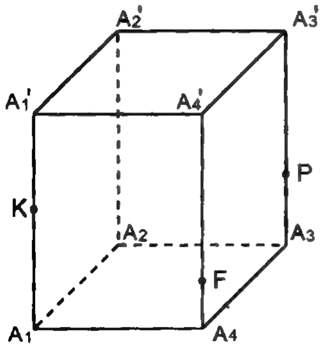


Таблица 11.7. **Построение сечений призмы.**

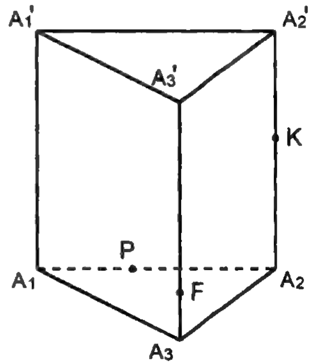
$A_1A_2\ldots A_nA_1'A_2'\ldots A_n'$ – призма. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки K, P и F.

1

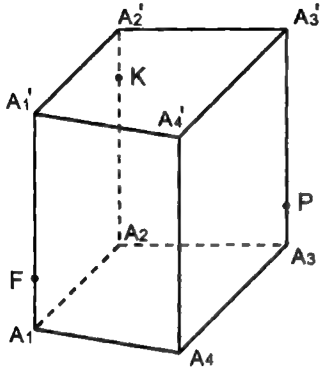


Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – параллелограмм.

2



3



4

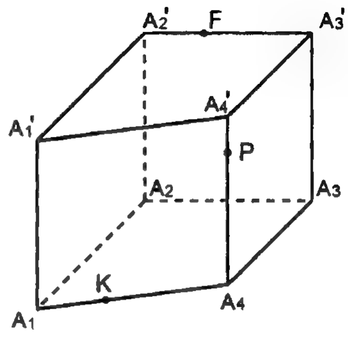
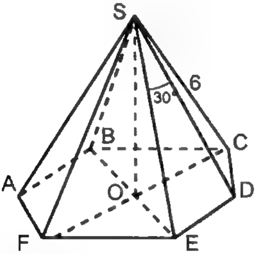


Таблица **11.8. Правильная пирамида.**

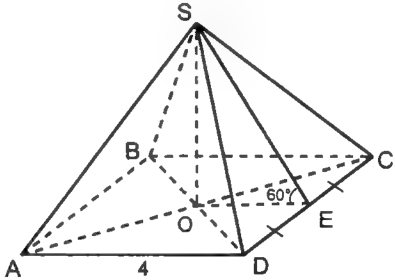
SO – высота правильной пирамиды.
Найти площадь полной поверхности пирамиды (рис. 2-6).

1

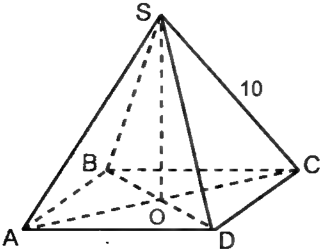


Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

2

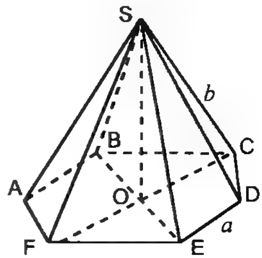


3

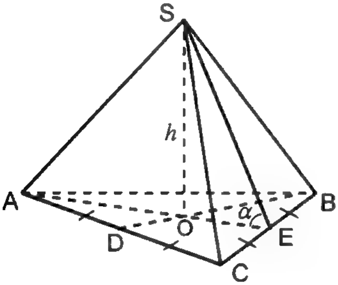


Дано: $SO = 2\sqrt{7}$.

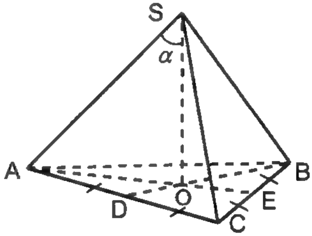
4



5



6

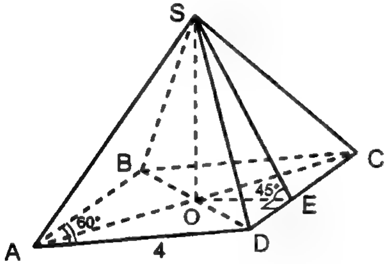


Дано: $AB = a$

Таблица 11.9. Пирамида.

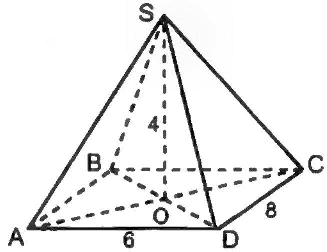
SO – высота пирамиды.
Найти площадь полной поверхности пирамиды (рис. 1, 2, 5, 6).

1



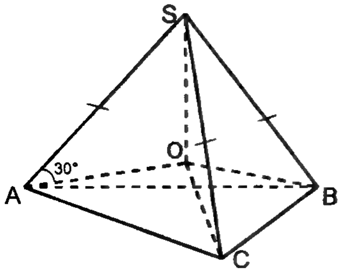
Дано: $ABCD$ – ромб.

2



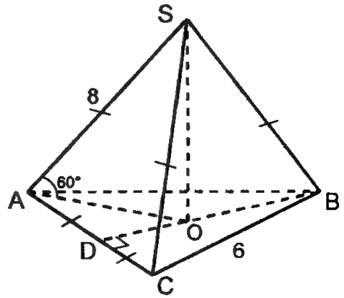
Дано: $ABCD$ – прямоугольник.

3



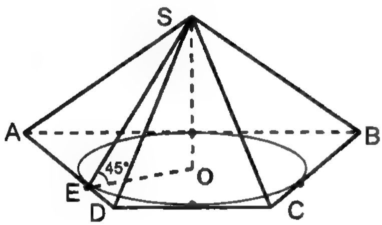
Дано: $AB = 5\sqrt{3}$, $\angle ACB = 150°$.
Найти SO.

4



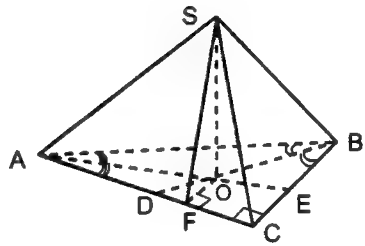
Найти AC.

5



Дано: $ABCD$ – трапеция. $AB = 9$, $CD = 4$, $AD = BC$. O – центр вписанной окружности.

6

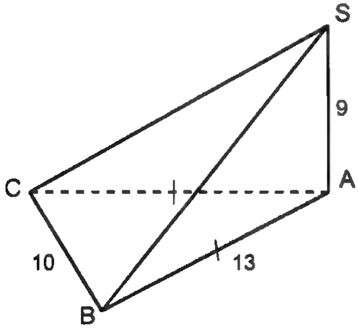


Дано: $AB = a$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle SFO = \beta$

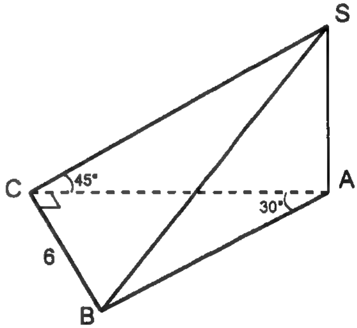
Таблица **11.10. Пирамида.**

SA – высота пирамиды.
Найти площадь полной поверхности пирамиды.

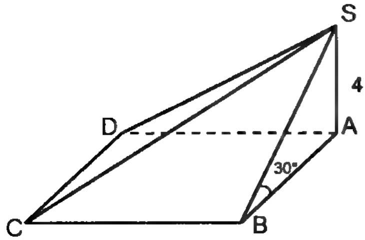
1



2

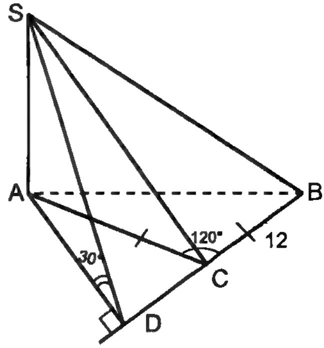


3



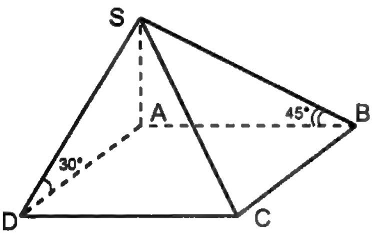
Дано: $ABCD$ – квадрат.

4



Дано: ΔABC – основание пирамиды.

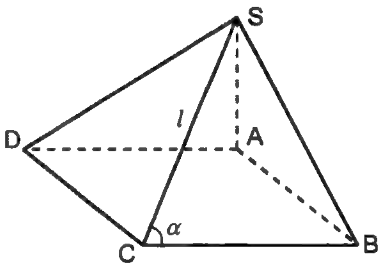
5



Дано: $ABCD$ – прямоугольник.

$SC = 6\sqrt{5}$

6

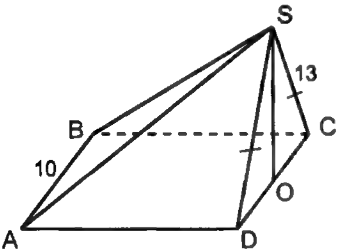
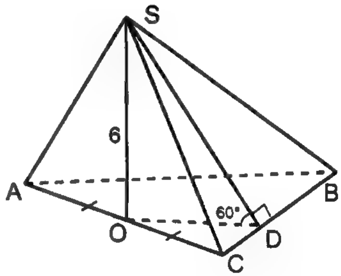
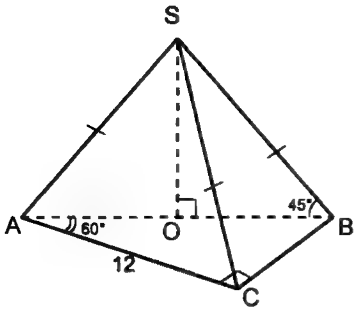
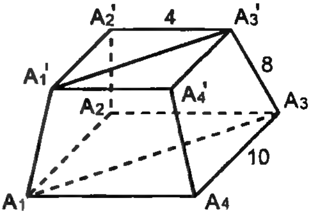
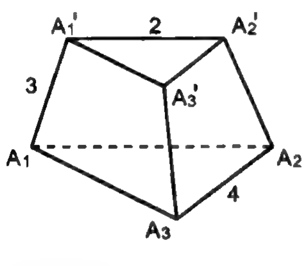
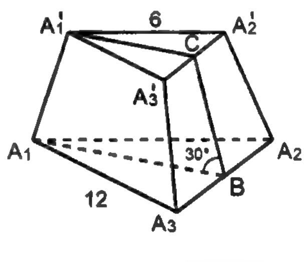


Дано: $ABCD$ – квадрат.

Таблица 11.11. **Пирамида. Усеченная пирамида.**

SO – высота пирамиды. Найти площадь полной поверхности пирамиды (рис. 1-3).

$A_1A_2...A_nA_1'A_2'...A_n'$ – правильная усеченная пирамида (рис. 4-6)

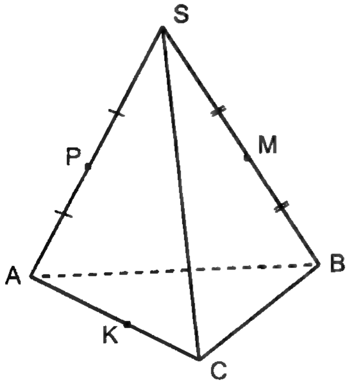
1  Дано: $ABCD$ – квадрат.	**2**  Дано: $\triangle ABC$ – правильный.
3 	**4**  **Найти** $S_{A_1A_1'A_3'A_3}$.
5 	**6** 

Найти площадь полной поверхности усеченной пирамиды.

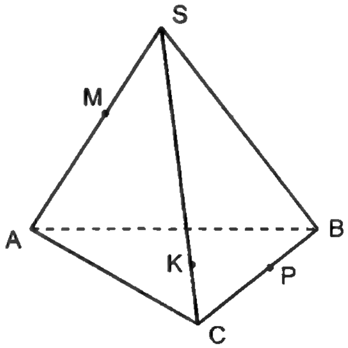
Таблица 11.12. **Построение сечений пирамиды.**

S – вершина пирамиды. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M, P и K.

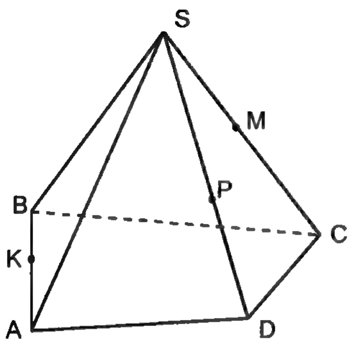
1



2



3



4

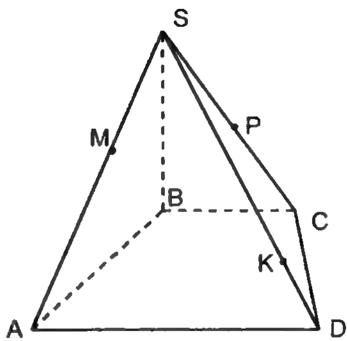
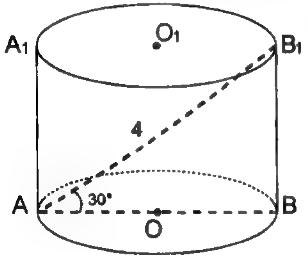


Таблица **11.13. Цилиндр.**

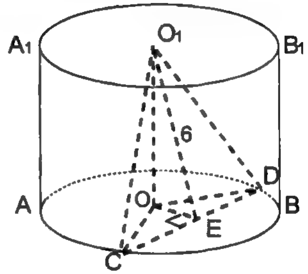
OO_1 – ось цилиндра, AA_1B_1B – осевое сечение цилиндра.

1



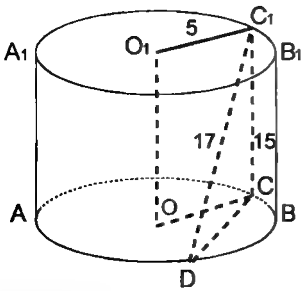
Найти высоту и радиус основания цилиндра.

2



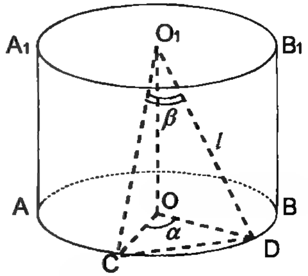
Дано: $\angle O_1EO = 45°$, $\angle EOC = 60°$.
Найти S_{CO_1D}.

3



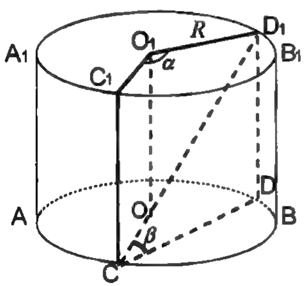
Найти расстояние между прямыми C_1D и OO_1.

4



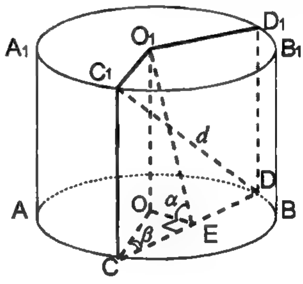
Найти высоту и радиус основания цилиндра.

5



Найти $S_{CC_1D_1D}$.

6



Найти $S_{CC_1D_1D}$.

Таблица **11.14. Конус.**

SO – высота конуса.

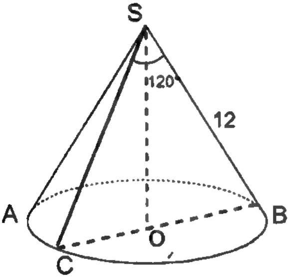
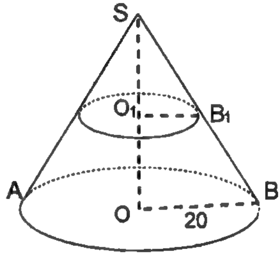
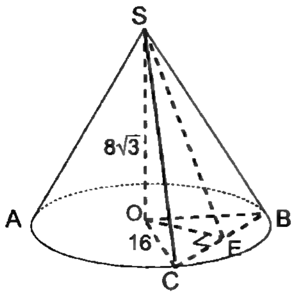
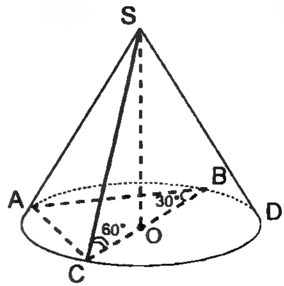
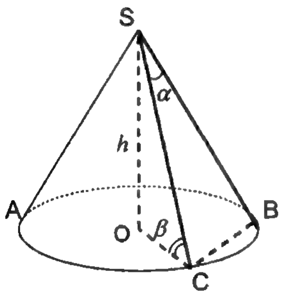
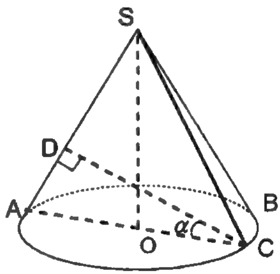
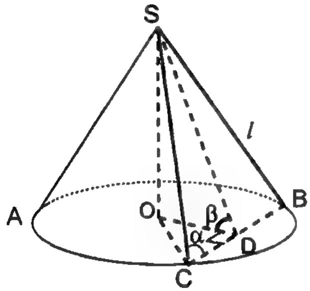
1  Найти SO и OB.	**2**  Дано: $SO = 16$, $SO_1 = 4$. **Найти площадь сечения конуса плоскостью, проходящй через точку** O_1 **параллельно основанию конуса.**
3  Дано: $\angle COB = 60°$. Найти $\angle SEO$.	**4**  Дано: $AC = 6$. Найти S_{ASC}.
5  Найти S_{BSC}.	**6**  Дано: $CD = m$. Найти S_{ASC}.

Таблица 11.15. Конус. Усеченный конус.

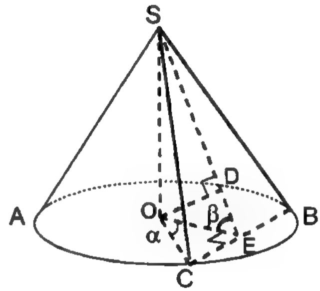
SO – высота конуса (рис. 1-3), O и O_1 – центры оснований усеченного конуса (рис. 4-6).

1



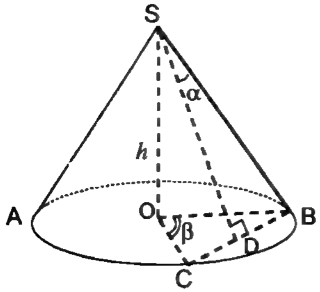
Найти SO и OC.

2



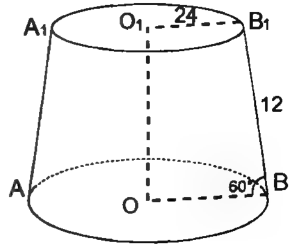
Дано: $OD = a$. Найти S_{BSC}.

3



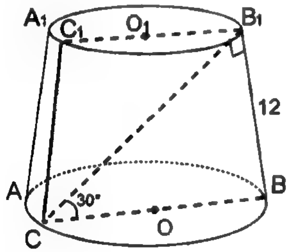
Найти SB.

4



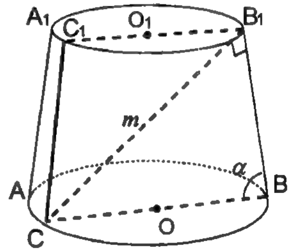
Найти OB и OO_1.

5



Найти $S_{CC_1B_1B}$.

6

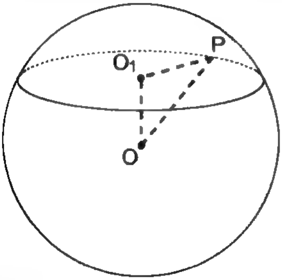


Найти $S_{CC_1B_1B}$.

Таблица 11.16. Шар.

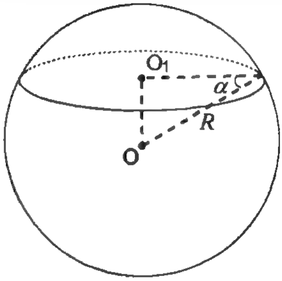
O – центр шара, O_1 – центр круга – сечения шара плоскостью.

1



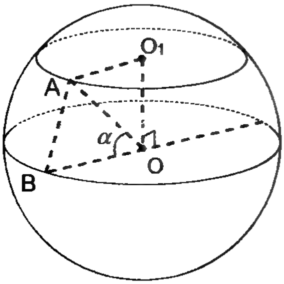
Дано: $OO_1 = 5$, $OP = 13$. Найти площадь сечения шара плоскостью.

2



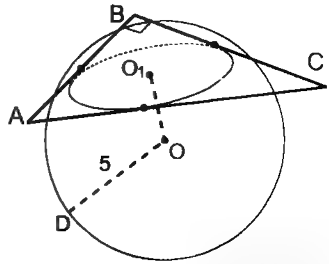
Найти площадь сечения шара плоскостью.

3



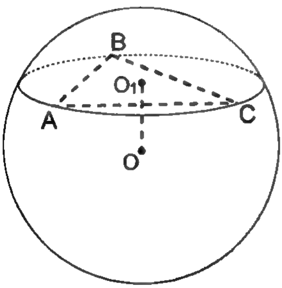
Дано: $AB = m$.
Найти O_1A.

4



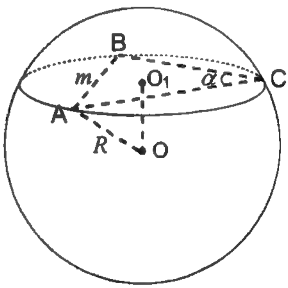
Дано: плоскость ABC пересекает шар. $AB = 9$, $BC = 12$. Найти OO_1.

5



Дано: $AB = BC = 40$, $AC = 48$, $OO_1 = 5$. Найти радиус шара.

6

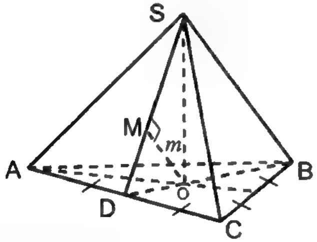


Найти OO_1.

Таблица **11.17. Вписанный и описанный шар.**

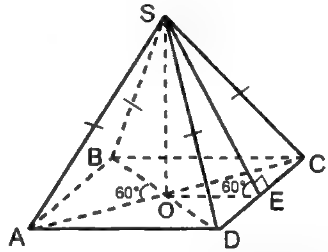
Найти радиус вписанного шара (рис. 1-2).
Найти радиус описанного шара (рис. 3-6).

1



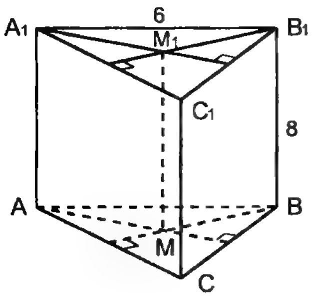
Дано: $SABC$ – правильная треугольная пирамида. $\angle SDO = \alpha$.

2



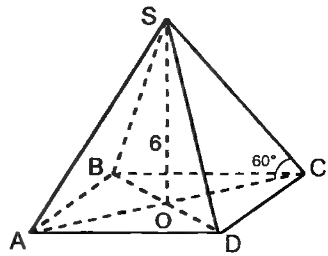
Дано: $SABCD$ – четырехугольная пирамида. $ABCD$ – прямоугольник. $AC = 12$.

3



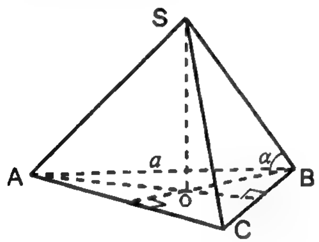
Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма.

4



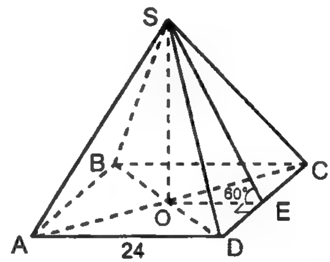
Дано: $SABC$ – правильная четырехугольная пирамида.

5



Дано: $SABC$ – правильная треугольная пирамида.

6

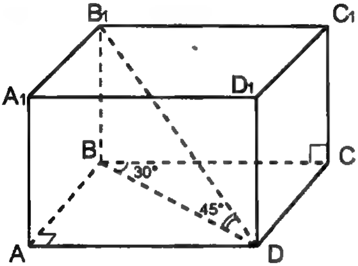


Дано: $SABC$ – правильная четырехугольная пирамида.

Таблица 11.18. Объем параллелепипеда.

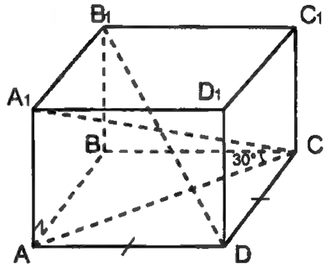
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Найти объем параллелепипеда.

1



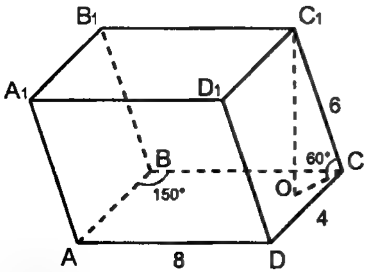
Дано: $B_1D = 10\sqrt{2}$.

2



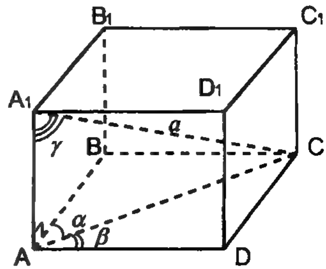
Дано: $A_1C = 12$, $B_1D = 10$.

3

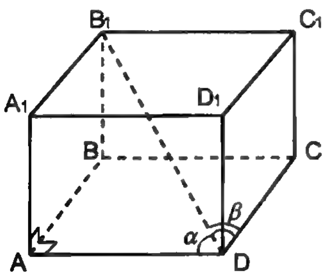


Дано: C_1O – высота параллелепипеда.

4

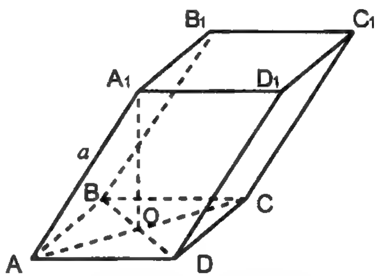


5



Дано: $B_1D = d$.

6

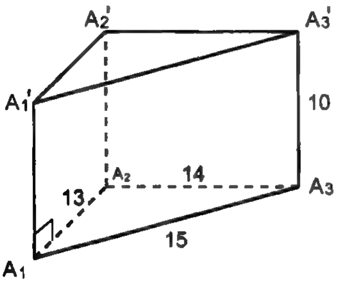


Дано: A_1O – высота параллелепипеда, $ABCD$ – квадрат. $\angle A_1AO = \alpha$.

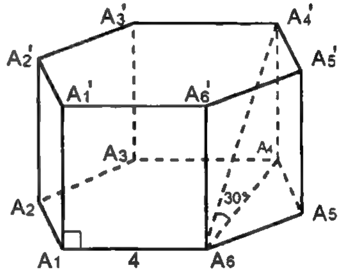
Таблица **11.19. Объем призмы.**

$A_1A_2\dots A_nA_1'A_2'\dots A_n'$ – призма. Найти объем призмы.

1

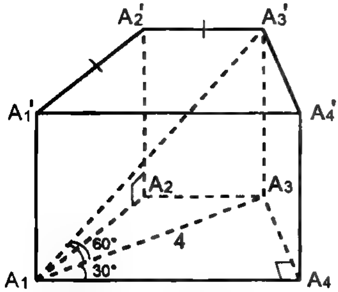


2



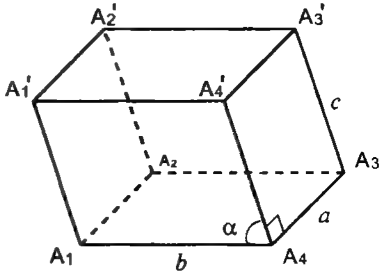
Дано: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – правильный шестиугольник.

3



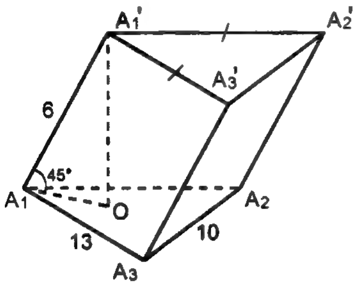
Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – трапеция.

4



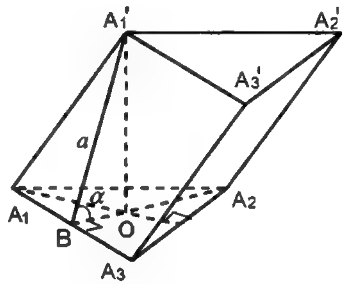
Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – прямоугольник.

5



Дано: $A_1'O$ – высота призмы.

6



Дано: $\Delta A_1A_2A_3$ – правильный. $A_1'O$ – высота призмы.

Таблица **11.20. Объем пирамиды.**

$SA_1A_2...A_n$ – пирамида, SO – высота пирамиды.
Найти объем пирамиды.

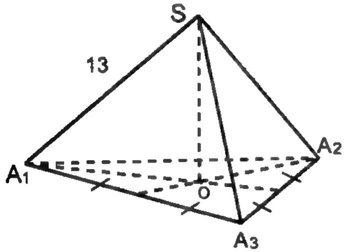
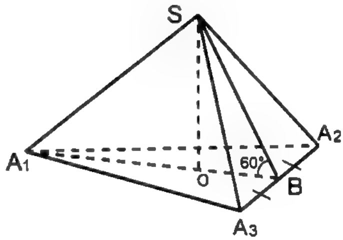
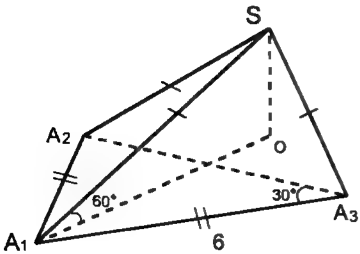
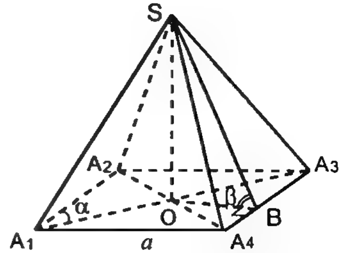
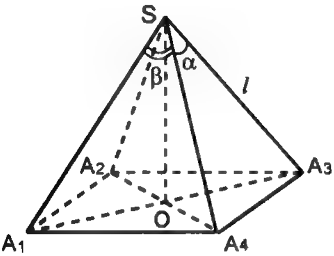
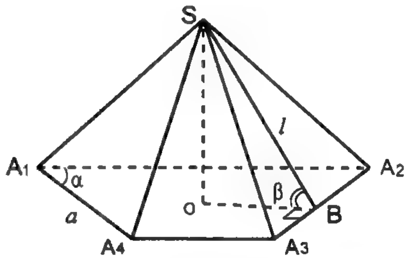
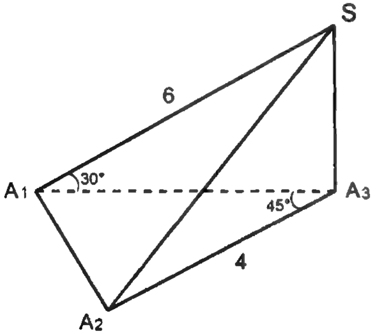
1  Дано: $\Delta A_1A_2A_3$ – правильный. $A_1A_2 = 12\sqrt{3}$.	**2**  Дано: $A_1A_2 = A_1A_3 = 10$, $A_2A_3 = 12$. O – центр окружности, вписанной в $\Delta A_1A_2A_3$.
3 	**4**  Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – ромб.
5  Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – прямоугольник.	**6**  Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – трапеция. $A_1A_4 = A_2A_3$. O – центр окружности, вписанной в трапецию.

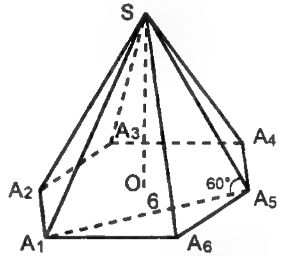
Таблица **11.21. Объем пирамиды.**

$SA_1A_2...A_n$ – пирамида. SO – высота пирамиды (рис. 2, 4-6), SA_3 – высота пирамиды (рис.1, 3). Найти объем пирамиды.

1

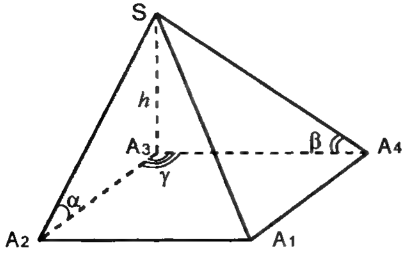


2



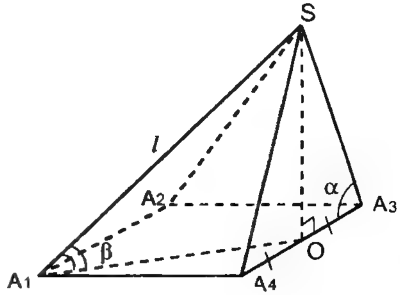
Дано: $SA_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – правильная шестиугольная пирамида.

3



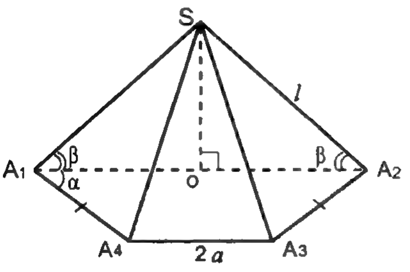
Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – параллелограмм.

4



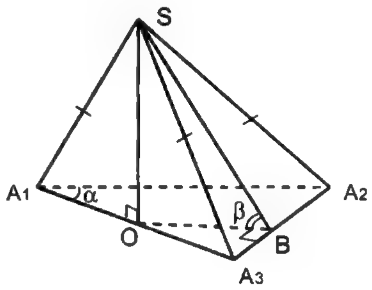
Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – прямоугольник.

5



Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – трапеция.

6



Дано: $OB = m$.

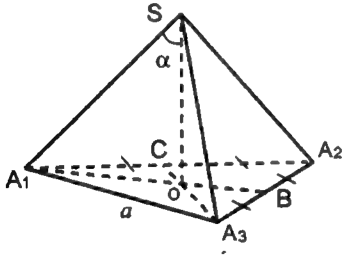
Таблица 11.22. **Объем пирамиды. Объем усеченной пирамиды.**

$SA_1A_2...A_n$ – правильная пирамида, SO – высота пирамиды (рис. 1-3);

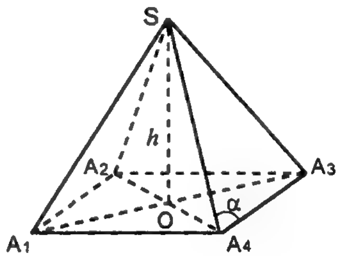
$SA_1A_2...A_nA_1'A_2'...A_n'$ – правильная усеченная пирамида (рис. 4-6).

Найти объем пирамиды.

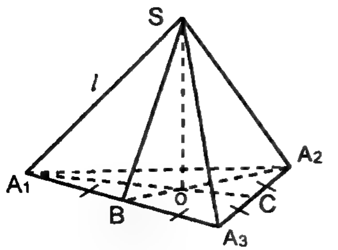
1



2

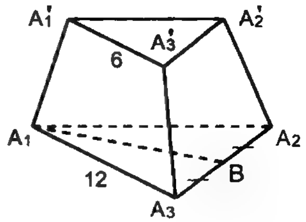


3



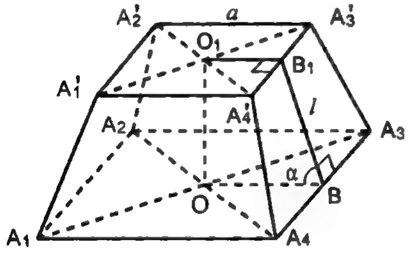
Дано: $\angle SBO = \alpha$.

4



Дано: $\angle A_1'A_1B = 60^\circ$

5



6

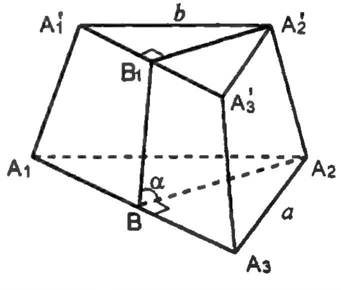
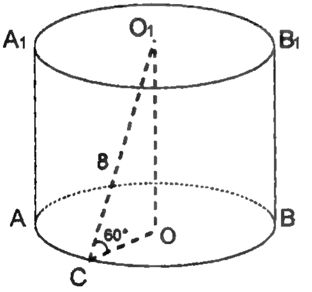


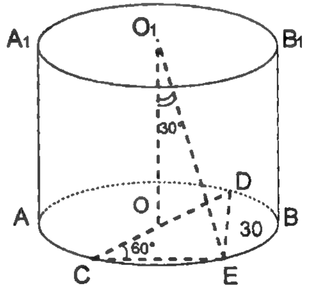
Таблица 11.23. Объем и площадь боковой поверхности цилиндра.

OO_1 – ось цилиндра. Найти объем и площадь боковой поверхности цилиндра.

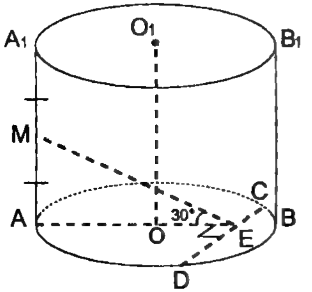
1



2

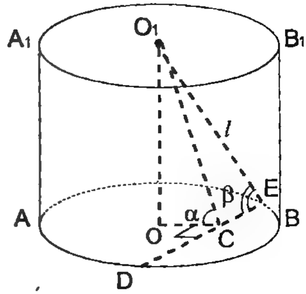


3

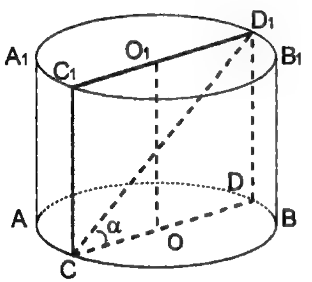


Дано: $OE = 6$, $CD = 16$.

4

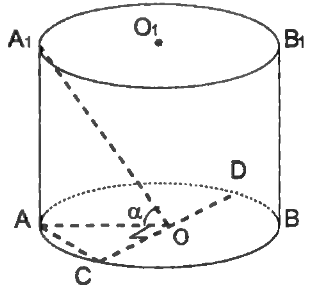


5



Дано: $S_{CC_1D_1D} = Q$.

6



Дано: $AC = 2a$.

Таблица 11.24. Объем и площадь боковой поверхности конуса.

SO – высота конуса. Найти объем и площадь боковой поверхности конуса.

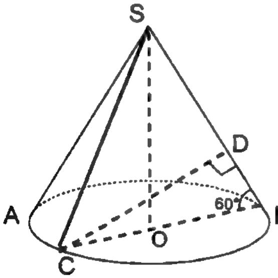
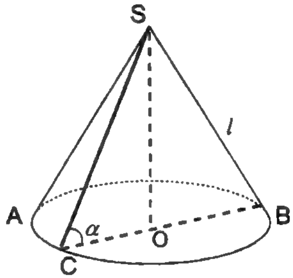
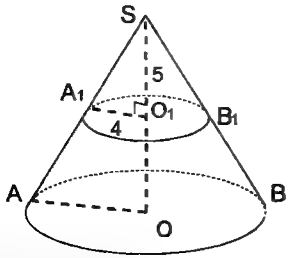
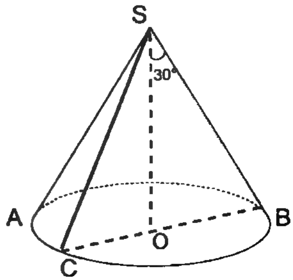
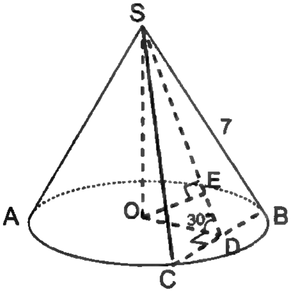
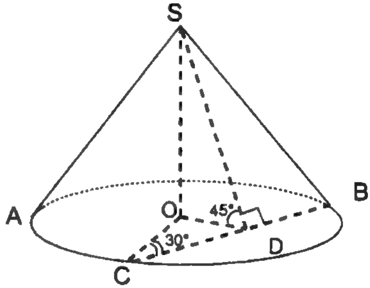
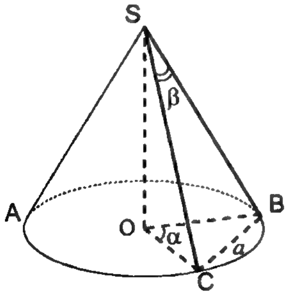
1  Дано: $CD = 6$.	**2** 
3  Дано: O_1 – центр круга – сечения конуса плоскостью, $SO = 15$.	**4**  Дано: $S_{SBC} = Q$.
5  Дано: $OE = 3$.	**6**  1) Дано: $BC = 12$. 2) Дано: $SB = 3\sqrt{5}$.

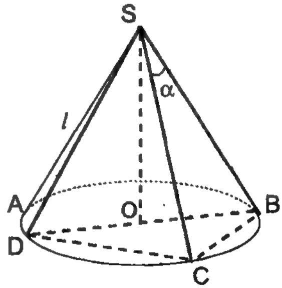
Таблица 11.25. Объем конуса. Объем усеченного конуса. Площадь боковой поверхности конуса. Площадь боковой поверхности усеченного конуса.

SO – высота конуса (рис. 1-3), O и O_1 – центры оснований усеченного конуса (рис. 4-6). Найти объем и площадь боковой поверхности конуса.

1

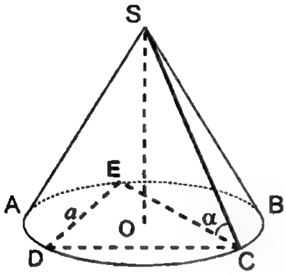


2



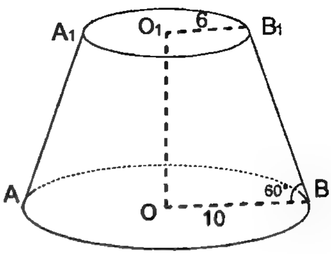
Дано: $\angle DSC = \beta$.

3

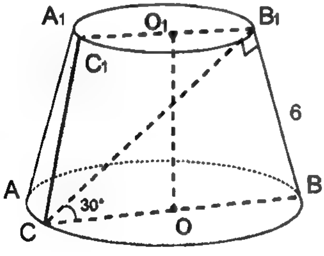


Дано: ΔCDE – правильный.

4



5



6

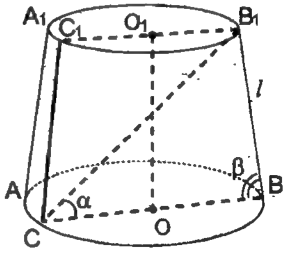
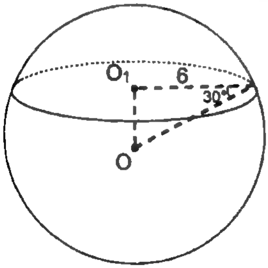
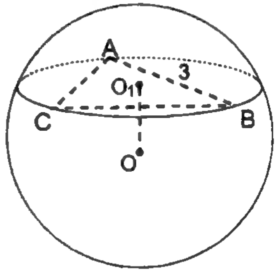
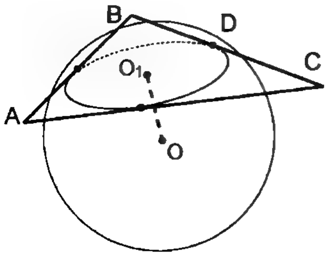
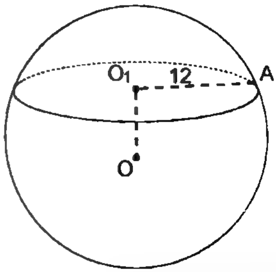
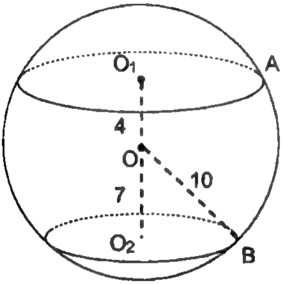
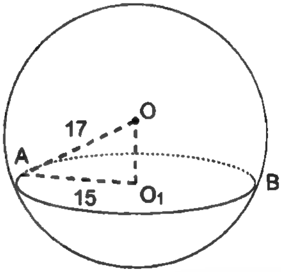


Таблица **11.26. Объем шара. Площадь поверхности шара.**

O – центр шара, O_1 и O_2 – центры кругов – сечений шара плоскостью. Найти объем и площадь поверхности шара (рис. 1-3).

1 	**2**  Дано: ΔABC – правильный, $OO_1 = 3$.
3  Дано: $OO_1 = 4$, $AB = AC = 10$, $BC = 12$.	**4**  Дано: $OO_1 = 5$. Найти объем и площадь сферической части меньшего из шаровых сегментов.
5  Найти объем и площадь сферической части шарового кольца.	**6**  Найти объем и площадь сферической части меньшего из шаровых сегментов.

Ответы, указания, решения

Повторение.

Таблица 1. **3.** $BC = b\ \mathrm{tg}\beta$, $AB = b\ \mathrm{tg}\beta\ \sin\alpha$, $AC = b\ \mathrm{tg}\beta\ \cos\alpha$. **4.** $AB = AC = \dfrac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **5.** $AB = AC = \dfrac{l}{\cos\alpha}$, $BC = 2l\ \mathrm{tg}\alpha$. **6.** $AC = 2m\cos\alpha$, $AB = \dfrac{2m\cos\alpha}{\sin\beta}$, $BC = 2m\cos\alpha\ \mathrm{ctg}\beta$. **7.** $AB = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$, $BC = \dfrac{AB\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $AC = \dfrac{AB\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **8.** $AC = 2r\ \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $AB = BC = \dfrac{r\ \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **9.** $AB = 2R\sin(\alpha+\beta)$, $BC = 2R\sin\alpha$, $AC = 2R\sin\beta$. **10.** $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$. **11.** $R = \dfrac{a}{2\cos\frac{\beta}{2}}$. **12.** $\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Указание. Радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, равен радиусу окружности, описанной около ΔABD, в котором $\angle ADB = \dfrac{\alpha}{2}$.

Таблица 2. **3.** $3\sqrt{3}$. **4.** 120. **5.** 156. **6.** $3\sqrt{3}$. **7.** $9\ (1+\sqrt{3})$. **8.** $12\sqrt{3}$. **9.** 32. **10.** 18. Указание. $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} = \dfrac{1}{2}OB\cdot OC\cdot\sin30^\circ + \dfrac{1}{2}OA\cdot OC\cdot\sin150^\circ$. **11.** 60. Решение. Пусть r – радиус окружности, вписанной в ΔABC. Тогда $AC = r + 12$, $BC = r + 5$, $(r+5)^2 + (r+12)^2 = 17^2$, откуда $r = 3$, $AC = 15$, $BC = 8$. **12.** $r^2\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\alpha$. Решение. Из ΔAO_1D: $AD = r\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, из ΔABD: $BD = r\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\alpha$. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AC\cdot BD = \dfrac{1}{2}\cdot 2r\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot r\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\alpha = r^2\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\alpha$.

Таблица 3. **3.** 40. **4.** $18\sqrt{2}$. **8.** 80. Указание. $OE^2 = AE\cdot ED$. **10.** 225. **11.** 64. Указание. Доказать, что высота трапеции равна её средней линии. **12.** 150. Указание. Из ΔAOB ($\angle O = 90^\circ$) $OE^2 = AE\cdot BE$, откуда $OE = 6$, $CD = 12$. $AB + CD = BC + AD = 25$.

Таблица 4. **1.** $\frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$. **2.** $m^2(m+n)\,\mathrm{ctg}\alpha$. **3.** $\frac{b^2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$. Указание. Из ΔABD по теореме синусов $AD = \frac{b\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$. **4.** $\frac{1}{2}a(2b + a\cos\beta)\sin\beta$. Указание. Проведем $BE \perp AD$. Из ΔABE: $BE = a\sin\beta$, $AE = -a\cos\beta$. Тогда $BC = AD - AE = b + a\cos\beta$. **5.** $\frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$. Указание. $AE = \frac{1}{2}(AD + BC)$. **6.** $2R^2\sin^2\alpha\cos\alpha$. Указание. Из ΔACD ($\angle C = 90°$): $CD = 2R\cos\alpha$. Проведем $CE \perp AD$. Из ΔCED: $CE = CD\sin\alpha = 2R\cos\alpha\sin\alpha$. Из ΔACE: $AE = CE\,\mathrm{tg}\alpha =$ $= 2R\sin^2\alpha$. $AE = \frac{1}{2}(AD + BC)$. **7.** $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Указание. Проведем $CE \parallel AB$. Из ΔCDE по теореме синусов: $CD = \frac{ED\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{(b-a)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Проведем $CF \perp AD$. Из ΔCDF $CF = CD\sin\beta = \frac{(b-a)\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **8.** $20\sqrt{3}$. Решение. Из ΔABD по теореме косинусов: $BD^2 = 3^2 + 10^2 - 60\cos\angle A$. Из ΔBCD по теореме косинусов: $BD^2 = 5^2 + 8^2 + 80\cos\angle A$. Тогда $\cos\angle A = \frac{1}{7}$, $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(3\cdot 10 + 5\cdot 8)\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7} = 20\sqrt{3}$. **9.** $\frac{121\sqrt{3}}{3}$. Указание. Из ΔADC: $AC = 14$. Проведем $BE \perp AC$. Т.к. $\angle ABC = 120°$, то $\angle BCA = 30°$, и $AE = EC = 7$. Из ΔABE: $BE = \frac{7}{\sqrt{3}}$. $S_{ABCD} = = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC}$.

Стереометрия. 10 класс.

Таблица 10.1. **4.** Нет. Указание. Воспользоваться методом доказательства от противного.

Таблица 10.2. **1.** Нет. Указание. Если бы прямые *a*, *b* и *c* лежали в одной плоскости, то точки *M*, *K* и *P* лежали бы на одной прямой. **2.** Доказательство. Предположим, что прямые *a* и *b* лежат в одной плоскости. Тогда прямая *c* также принадлежит этой плоскости. Через прямые *a* и *c* можно провести единственную плоскость (плоскость α), которой будет принадлежать и прямая *b*. Противоречие. **3.** Указание. Искомая точка – точка пересечения прямых *m* и *l*. **4.** Указание. Прямая пересечения плоскостей *ABC* и β проходит через точку *C* и точку пересечения прямых *AB* и *l*.

Таблица 10.3. **3.** Указание. Воспользоваться методом доказательства от противного. **4.** Указание. Воспользоваться методом доказательства от противного. **5.** Доказательство. Предположим, что прямые *a* и *b* не

скрещивающиеся. Тогда они лежат в одной плоскости. Но через прямую b и точку D проходит единственная плоскость, в которой лежит и прямая BC ($BC \parallel b$). Имеем: прямая a лежит в плоскости ABC. Противоречие. **6.** 26. Указание. Доказать, что $EFKP$ – параллелограмм. **7.** 9. Решение. KK_1 – средняя линия трапеции AA_1B_1B, откуда $KK_1 = 7$. DD_1 – средняя линия трапеции KK_1C_1C, откуда $CC_1 = 9$. **8.** Указание. Проведем $KF \parallel BD$. Тогда KK_1 – средняя линия трапеции $BDEC$, $KF = 6$. MF – средняя линия треугольника ABC, $MF = 4$. $MF + FK = KM$, то есть точки M, F и K лежат на одной прямой, то есть прямая MK лежит в плоскости ABC.

Таблица 10.4. **3.** Доказательство. Так как $a \parallel b$, то $a \parallel \beta$, откуда $a \parallel c$. **4.** Указание. Выбрать на прямой a точку A и провести через точку A и прямую b плоскость γ. Доказать, что прямая a лежит в этой плоскости. **5.** Доказательство. Предположим, что $a \parallel \alpha$. Через M и a проведем плоскость. Она пересекает плоскость α по прямой c, параллельной a. Тогда через точку M проходят две прямые, переллельные прямой a. Противоречие. **7.** 14. Указание. Рассмотреть подобные треугольники ABC и AB_1C_1.

Таблица 10.5. **6.** Доказательство. Так как $AA_1 : A_1D = BB_1 : B_1D$, то $AB \parallel A_1B_1$. Аналогично, $BC \parallel B_1C_1$, откуда плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны.

Таблица 10.6. **5.** Доказательство. Предположим, что прямые AB и A_1B_1 лежат в одной плоскости. Тогда и прямые AA_1 и BB_1 лежат в одной плоскости, что противоречит условию. **6.** 6; 8; 4. **7.** 10; 2,4. **8.** Доказательство. $AB \parallel A_1B_1$, $\Delta AMB \sim \Delta A_1MB_1$, откуда $AM : MA_1 = BM : MB_1 =$ $= AB : A_1B_1$. Из подобия треугольников BMC и B_1MC_1: $BM : MB_1 =$ $= BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1$; из подобия треугольников AMC и A_1MC_1: $AM : MA_1 =$ $= AC : A_1C_1$, откуда $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ (по трем сторонам).

Таблица 10.7. **4.** Указание. Точка D_1 – проекция точки D лежит на пересечении прямых, параллельных прямым A_1B_1 и B_1C_1, проведенных через точки C_1 и A_1 соответствтвнно. **5.** Решение. Пусть точка K – середина отрезка A_1B_1. Проведем луч KM_1 и отложим на нем отрезок $M_1C_1 = 2M_1K$. Точка C_1 – искомая.

6. Решение. Проведем прямые $A_1M \parallel B_1C_1$ и $C_1N \parallel A_1B_1$. Точка пересечения этих прямых – точка O_1 – проекция центра правильного шестиугольника. Далее строим точки D_1, E_1 и F_1, симметричные точкам A_1, B_1 и C_1 соответственно относительно точки O. Шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – искомый (рис.1). **7.** Указание. Искомые перпендикуляры параллельны сторонам четырехугольника $ABCD$.

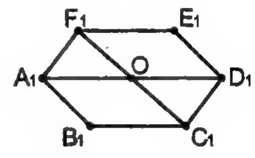


Рис.1.

Таблица 10.8. **1.** Указание. Искомый перпендикуляр параллелен диагонали AC. **2.** Указание. Искомые перпендикуляры параллельны медианам ΔABC. **3.** Указание. Искомая высота параллельна прямой, которая проходит через середины отрезков BC и AD. **4.** Указание. Проекция биссектрисы угла A делит сторону B_1C_1 в отношении 2:1, считая от точки C. **5.** Решение. Проведем хорду, параллельную AB. Через ее середину и точку O проведем диаметр. Он и будет искомым. **6.** Решение. Проведем две параллельные хорды. Через их середины проведем хорду, которая будет проекцией диаметра, а ее середина – проекцией центра окружности.

Таблица 10.9. **3.** Решение. Прямая CB перпендикулярна плоскости AMB, $AD \parallel BC$, откуда прямая AD перпендикулярна плоскости AMB и $AD \perp AM$. **4.** Указание. Доказать, что прямая BC перпендикулярна плоскости AMD. **5.** Указание. MO – высота равнобедренных треугольников AMC и BMD. **6.** Решение. $MO \perp BD$, $AC \perp BD$, откуда прямая BD перпендикулярна плоскости AMC.

Таблица 10.10. **1.** 1. **2.** 5. **3.** 5. **4.** 4. Решение. Радиус R окружности, описанной около ΔABC, равен: $R = \dfrac{AB}{2\sin ABC} = \dfrac{6}{2\sin 120^\circ} = 2\sqrt{3}$. Из ΔMOC ($\angle O = 90^\circ$): $MC = \sqrt{MO^2 + OC^2} = 4$. **5.** 12. Решение. Из ΔABC: $AB = \dfrac{6}{\cos 30^\circ} = 4\sqrt{3}$. Из ΔAMB ($\angle B = 90^\circ$): $MB = AB\mathrm{tg}60^\circ = 12$. **6.** $2\sqrt{6}$; 4. Решение. Из ΔAMD ($\angle A = 90^\circ$): $AD = MD\cos 60^\circ = 4$, $AM = MD\sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$. Из ΔAMB ($\angle B = 90^\circ$): $AB = AM\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$.

Таблица 10.11. **4.** 6. **5.** 18. **6.** $\sqrt{a^2 - b^2 tg^2\alpha}$. **7.** $4\sqrt{21}$. Решение. Из ΔAA_1C ($\angle A_1 = 90^\circ$): $AC = 16$. Из ΔABC: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 20$. Из ΔAA_1B ($\angle A_1 = 90^\circ$): $BA_1 = \sqrt{AB^2 - AA_1^2} = 4\sqrt{21}$. **8.** 12. **9.** 16. Решение. Из ΔAA_1C ($\angle A_1 = 90^\circ$): $AA_1 = A_1C\ \mathrm{tg}60^\circ = 4\sqrt{3}$, $AC = 8$. Из ΔAA_1B ($\angle A_1 = 90^\circ$): $AB = 8\sqrt{3}$. Из ΔABC: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 16$.

Таблица 10.12. **1.** $\dfrac{13\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{69}}{2}$. **2.** $5\sqrt{10}$. Решение. Из ΔAA_1D ($\angle A_1 = 90^\circ$): $A_1D = 12$; из ΔA_1BD ($\angle D = 90^\circ$): $BA_1 = 13$, из ΔAA_1B ($\angle A_1 = 90^\circ$): $AB = 5\sqrt{10}$. **3.** 45°. Решение. $AB = AC = 2\sqrt{2}$. Проведем $AD \perp BC$. Из ΔADC ($\angle D = 90^\circ$): $\cos x = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $x = 45^\circ$. **4.** 60°. Решение. Из ΔAA_1C

($\angle A_1 = 90°$): $AA_1 = AC\sin60° = 5\sqrt{3}$, $A_1C = 5$. Из ΔABA_1 ($\angle A_1 = 90°$): $A_1B =$ $= \sqrt{AB^2 - AA_1^2} = 8$. Из ΔA_1BC по теореме косинусов: $\cos x =$ $= \dfrac{BA_1^2 + CA_1^2 - BC^2}{2A_1B \cdot A_1C} = \dfrac{64+25-49}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \dfrac{1}{2}$, $x = 60°$. **5.** $\arcsin\dfrac{a\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{b}$, $\sqrt{b^2 - a^2ctg^2\alpha}$. **6.** $\arcsin\dfrac{b\sin\beta\sin\alpha}{a}$ или $\pi - \arcsin\dfrac{b\sin\beta\sin\alpha}{a}$.

7. $\dfrac{m\sin\beta\sin\alpha}{\sin\gamma}$. Решение. Из ΔABC по теореме синусов: $AB = \dfrac{m\sin\beta}{\sin\gamma}$.

Из ΔAA_1B ($\angle A_1 = 90°$): $AA_1 = AB\sin\alpha = \dfrac{m\sin\beta\sin\alpha}{\sin\gamma}$.

8. $\sqrt{(a^2+b^2-2ab\cos\beta)tg^2\alpha + b^2}$. Решение. Из ΔA_1BC по теореме косинусов: $A_1C = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\beta}$. Из ΔAA_1C ($\angle A_1 = 90°$): $AA_1 = A_1C\mathrm{tg}\alpha =$ $= \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\beta}\cdot\mathrm{tg}\alpha$. Из ΔAA_1B ($\angle A_1 = 90°$): $AB = \sqrt{A_1B^2 + AA_1^2} =$ $= \sqrt{(a^2+b^2-2ab\cos\beta)tg^2\alpha + b^2}$.

<u>**Таблица 10.13.**</u> **4.** 30. **5.** $\sqrt{m^2 + a^2\sin^2\alpha}$. Решение. Проведем $MD \perp AC$. $BD \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Из ΔBDC ($\angle D = 90°$): $BD =$ $= a\sin\alpha$. Из ΔBMD ($\angle B = 90°$): $MD = \sqrt{m^2 + a^2\sin^2\alpha}$. **6.** Доказательство. Проведем $MD \perp AB$ и $ME \perp BC$. $OD \perp AB$, $OE \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах). $\Delta MBD = \Delta MBE$ (по гипотенузе и острому углу), откуда $MD = ME$. $OD = OE$ (как проекции равных наклонных). $\Delta BOD = \Delta BOE$ (по катету и гипотенузе), откуда $\angle OBD = \angle OBE$.

<u>**Таблица 10.14.**</u> **2.** Провести медианы BM_1 и AM_2. Провести $DD_1 \parallel BM_1$ и $DD_2 \parallel AM_2$, где точки D_1 и D_2 лежат на сторонах AC и BC соответственно. MD_1 и MD_2 – искомые перпендикуляры. **3.** Указание. Основание искомого перпендикуляра – точка M_1 такая, что $BC : CM_1 = 2:1$. **4.** 13 и 15. **5.** 8; $4\sqrt{2}$. Решение. Проведем $CE \perp AB$, $CE = 8\sqrt{3}$. Проведем $OF \parallel AB$. $OF = 4\sqrt{3}$. Из Из ΔMOF ($\angle O = 90°$): $MF = \sqrt{MO^2 + OF^2} = 8$. Проведем $OK \perp BD$, $OK = 4$. Из ΔMOK ($\angle O = 90°$): $MK = 4\sqrt{2}$. MF и MK – искомые расстояния. **6.** 10, 17. Решение. Проведем $BE \perp AD$, $BE = 6$. Из ΔMBE ($\angle B = 90°$): $ME = 10$. ME – расстояние от точки M до прямой AD. Аналогично находим расстояние от точки M до прямой AC.

Таблица 10.15. **1.** $\sqrt{14}$. Решение. Из ΔMOC ($\angle O = 90°$): $OC = 2$. Из ΔOCK ($\angle K=90°$, $OK=CK$): $OK = CK = \sqrt{2}$. Из ΔMKC ($\angle K=90°$): $MK = \sqrt{MC^2 - CK^2} = \sqrt{14}$. **2.** 5. Решение. Из ΔABC ($\angle C = 90°$): $AB = 25$. $CD \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах). $CD = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = 12$. Из ΔMDC ($\angle C = 90°$): $MC = 5$. **3.** 13. Указание. Найти высоту CD треугольника ABC, воспользовавшись тем, что $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB$. **4.** 8. Указание. $OD = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3}$. **5.** 8. Указание. Радиус окружности, вписанной в равнобокую трапецию, можно найти по формуле $r = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, где a и b – основания трапеции. **6.** $\arccos(\cos\alpha\cos\beta)$. Решение. Пусть $AC = a$. Тогда из ΔACB: $BC = a\cos\beta$. Из ΔMCA ($\angle A = 90°$): $MC = \dfrac{a}{\cos\alpha}$, из ΔMCB ($\angle B = 90°$): $\cos MCB = \dfrac{BC}{MC} = \cos\alpha\cos\beta$.

Таблица 10.16. **1.** Доказательство. 1 способ. MB – линия пересечения плоскостей AMB и CMB. $AB \perp MB$, $CB \perp MB$. Так как $\angle ABC = 90°$, то плоскости ABM и CBM перпендикулярны. 2 способ. $AB \perp BC$, $AB \perp MB$, значит, прямая AB перпендикулярна плоскости MBC. Так как плоскость AMB проходит через прямую AB, перпендикулярную плоскости MBC, то плоскости AMB и MBC перпендикулярны. **2.** Указание. $AC \perp BD$, $AC \perp MD$. Значит, прямая AC перпендикулярна плоскости DMB. **3.** 1) Указание. Доказать, что прямая MO перпендикулярна плоскости ABC. 2) Указание. Доказать, что прямая AC перпендикулярна плоскости BMD. **4.** Указание. Доказать, что прямая MO перпендикулярна плоскости ABC. **5.** Доказательство. Через точку A в плоскости α проведем прямую c, $c \perp a$. Плоскость, проходящая через прямые b и c, перпендикулярна прямой a. Так как $\alpha \perp \beta$, то угол между прямыми b и c равен 90°. Поскольку $b \perp a$ и $b \perp c$, то $b \perp \alpha$. **6.** Указание. Проведем через точку M прямую MB_1, перпендикулярную AB. Тогда MB_1 перпендикулярна плоскости ABC (задача 5). Аналогично, если прямая MB_2 перпендикулярна BC, то MB_2 перпендикулярна плоскости ABC. Получаем, что через точку M проходят два различных перпендикуляра к плоскости ABC. Противоречие.

Таблица 10.17. **1.** 12. Указание. Искомое расстояние равно высоте треугольника DFC, проведенной к стороне DF. **2.** 17. Указание. $AB^2 = AA_1^2 + A_1B_1^2 + BB_1^2$. **3.** $12\sqrt{2}$. **4.** 10. Указание. $D_1B \perp AB$, $C_1A \perp AB$ (теорема о трех перпендикулярах). Тогда AC_1D_1B – прямоугольник, $AC_1 = BD_1$.

5. $3\sqrt{26}$. Указание. $NC = 5$, $AM = 8$. Проведем $NK \perp AM$. $NK = AC = 15$, $KM = 3$.

<u>**Таблица 10.18.**</u> **1**. 5. **2.** 12. **3.** $2\sqrt{14}$. **4.** $2\sqrt{2}$. Указание. Искомое расстояние равно высоте BE параллелограмма $ABCD$, проведенной к стороне AD. **5.** $3\sqrt{2}$. Указание. Искомое расстояние равно высоте EF ΔEMB, где E – середина AC. **6.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Указание. Провести $MO \perp BD$. Искомое расстояние равно высоте OE ΔAMO.

<u>**Таблица 10.19.**</u> **2**. $A(2;0;0)$, $B(2;0;-2)$, $C(0;0;$). **3.** Указание. Сторона куба равна 4. **4.** 2 ; $M($;8;5). Указание. $A(4;7;8)$, $B(-6;9;2)$. **5.** $P(\sqrt{6};2;0)$, $K(\sqrt{6};4;\sqrt{6})$. $\sqrt{10}$. Решение. Из ΔOAB ($\angle B = 90°$): $OB = 4$, $AB = 4\sqrt{3}$. Тогда $B(0;4;0)$. Из ΔABC ($\angle C = 90°$): $AC = BC = 2\sqrt{6}$. Тогда $C(2\sqrt{6};4;0)$, $A(2\sqrt{6};4;2\sqrt{6})$, откуда $K(\sqrt{6};4;\sqrt{6})$, $P(\sqrt{6};2;0)$, $PK = \sqrt{10}$. **6.** $2\sqrt{5}+\sqrt{73}+\sqrt{29}$. Решение. $B_1(6;0;4)$, P – середина отрезка B_1O. Тогда $P(3;0;2)$. $C(6;-8;0)$, K – середина отрезка OC. Тогда $K(3;-4;0)$. $M(6;-8;2)$. Тогда $PK = 2\sqrt{5}$, $PM = \sqrt{73}$, $KM = \sqrt{29}$.

<u>**Таблица 10.20.**</u> **1**. 1) 90°; 2) 45°; 3) 90°. **2.** 90°. Решение. Проведем через точку C прямую l, параллельную AB. Тогда угол между CD и AB равен углу между CD и l. По теореме о трех перпендикулярах $CD \perp l$. **3.** 90°. Указание. Провести через точку D прямую l, параллельную AC. Угол между MD и AC равен углу между MD и l. **4.** 90°. Указание. Через точку B провести прямую, параллельную AC. **5.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. Решение. Угол между MD и BC равен углу между AD и MD. Пусть $AB = a$, тогда $AM = a\sqrt{2}$. Из ΔMAD $\operatorname{tg} MDA = \sqrt{2}$.

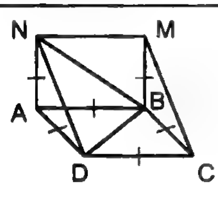


Рис.2.

6. 60°. Решение. Через точку A проведем перпендикуляр AN к плоскости ABC и отложим на нем отрезок $AN = BM$ (рис.2). Тогда $\Delta AND = \Delta ANB = \Delta BCD$ (по двум катетам), откуда $ND = NB = BD$. Так как $MC \parallel ND$, то угол между прямыми MC и BD равен углу между прямыми ND и BD, т.е. искомый угол равен 60°.

<u>**Таблица 10.21.**</u> **3.** 45°. **4.** 30°. Решение. Из ΔABC $AC = 2\sqrt{3}$. Из ΔMAB $\cos MBA = \frac{BA}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\angle MBA = 30°$. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. Решение. Пусть

$AC = a$, тогда $AB = a\sqrt{2}$. Из ΔMAB $\mathrm{tg}MBA = \frac{MA}{MB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **6.** $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}$.
Решение. Пусть $MA = a$, тогда $BE = 2a$. Из ΔAEB $AB = a\sqrt{5}$. Из ΔMBA $\mathrm{tg}MBA = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **7.** 30°.

<u>Таблица 10.22.</u> **2.** 30°. Решение. Из ΔBAC ($\angle A = 30°$): $BC = 25$, $AD = \frac{15\cdot 20}{25} = 12$. Из ΔAOD $\sin ADO = 0{,}5$, $\angle ADO = 30°$. **3.** 60°. **4.** 60°. Указание. Через точку B в плоскости β провести прямую, параллельную прямой a, и из точки A провести перпендикуляр AC на эту прямую. $BC = B_1A_1 = 10$. Из ΔABC $AC = \sqrt{21}$. Далее из ΔAA_1C найти угол AA_1C. **5.** $\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Указание. Пусть $CD = a$, тогда $BD = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $AB = 2a$, $DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из ΔCDE $\mathrm{tg}CED = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **6.** $\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\alpha)$. Указание. Пусть $MO = a$, тогда $OC = a\,\mathrm{ctg}\alpha$, $OE = \frac{a\sqrt{2}}{2}\mathrm{ctg}\,\alpha$. Из ΔOME $\mathrm{tg}MEO = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\alpha$.

<u>Таблица 10.23.</u> **2.** 45°. **3.** 168. **4.** 1,5Q. Решение. $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = 3S_{BMC}\cos 60° = 1{,}5Q$. **5.** 45°. **6.** 30°.

<u>Таблица 10.24.</u> **3.** $C(3;8;2)$. Решение. $\overline{AD}(1;4;-5)$, $\overline{BC}(x-2;y-4;z-7)$. $\overline{AD} = \overline{BC}$, откуда $x = 3$, $y = 8$, $z = 2$. **6.** Доказательство. $\overline{AB}(-3;2;8)$, $\overline{AC}(2;-5;2)$, $\overline{AD}(-2;1;-1)$. Так как $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = \overline{AB}\cdot\overline{AD} = 0$, то $AB \perp AC$ и $AB \perp AD$, откуда прямая AB перпендикулярна плоскости ADC. **7.** $\frac{19}{3\sqrt{59}}$.
8. 1) $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) 4. Указание. 1) $|\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{(\bar{a}+\bar{b})^2} = \sqrt{\bar{a}^2+\bar{b}^2+2\bar{a}\bar{b}} = \sqrt{|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2\cdot|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos 60°}$. **8.** $-4-\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Указание. $(\bar{a}+\bar{c})(\bar{b}-\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b} - \bar{a}\cdot\bar{c} + \bar{b}\cdot\bar{c} - \bar{c}\cdot\bar{c} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos 120° - |\bar{a}|\cdot|\bar{c}|\cdot\cos 45° + |\bar{b}|\cdot|\bar{c}|\cdot\cos 150° - |\bar{c}|^2$.

Стереометрия. 11 класс.

<u>Таблица 11.1.</u> **2.** 120°. **3.** 9. Решение. Через точку A_1 в плоскости A_1B_1B проведем прямую, перпендикулярную прямой MN, и отложим на ней отрезок $A_1C = 5$. Из ΔAA_1C $AC = 7$. Из ΔABC ($\angle C = 90°$) $AB = 9$.

4. arcsin(sinαsinβ). Решение. Пусть $AB = a$. Из ΔABC $AC = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. Из ΔACD ($\angle C = 90°$) $AD = \dfrac{AC}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sin\alpha\sin\beta}$. Из ΔADB $\sin ADB = \dfrac{AB}{AD} = \sin\alpha\sin\beta$.

5. $\arccos\dfrac{1}{3}$. Решение. Проведем прямую AE перпендикулярно ребру b. $\Delta AES = \Delta ADS$ (по гипотенузе и острому углу), откуда $AD = AE$. $\Delta AOD = \Delta AOE$ (по катету и гипотенузе), откуда $OE = OD$, т.е. точка O равноудалена от сторон $\angle(bc)$, откуда SO – биссектриса этого угла. Пусть $OD = a$. Из ΔSOD $SD = a\sqrt{3}$. Из ΔASD $AD = SD\sqrt{3} = 3a$. Из ΔAOD $\cos ADO = \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{1}{3}$. **6.** $\arccos\dfrac{3}{4}$. Решение. $\Delta SAB = \Delta SAC$ (по катету и острому углу), откуда $SB = SC$, $AB = AC$. Пусть $AB=AC=a$. Из ΔABC $BC = a$. Из ΔABS ($\angle A = 90°$) $SB = a\sqrt{2}$. Из ΔSBC $\cos BSC = \dfrac{2a^2+2a^2-a^2}{4a^2} = \dfrac{3}{4}$.

__**Таблица 11.2.**__ **1.** 1) 108; 2) 148. **2.** $8(3+10\sqrt{3})$. **3.** 5. **4.** 916. **5.** $\sqrt{57}$; 5. **6.** $4(54+55\sqrt{3})$. Указание. Провести $A_3B \perp A_1A_2$. Тогда $A_1B = \dfrac{14+4}{2} = 9$, $A_2B = 5$. Из $\Delta A_1'A_1A_3$ ($\angle A_1 = 90°$) $A_1A_3 = 15$.

__**Таблица 11.3.**__ **1.** 1) 60; 2) 78. **2.** 1) 36; 2) $4(9+2\sqrt{3})$. **3.** 1) 48; 2) $12(4+\sqrt{3})$. **4.** 1) $216\sqrt{2}$; 2) $72(2+3\sqrt{2})$. **5.** 1) $72\sqrt{6}$; 2) $36(3+2\sqrt{6})$. **6.** 1) $\dfrac{3}{2}a^2\sin 2\alpha$; 2) $\dfrac{a^2}{2}(3\sin 2\alpha + \sqrt{3}\cos^2\alpha)$.

__**Таблица 11.4.**__ **1.** 1) 1024; 2) 1536. Указание. Пусть $A_1A_4 = a$, тогда $A_1A_3 = a\sqrt{2}$. Из $\Delta A_1'A_1A_3$ $a^2+2a^2 = 768$, $a = 16$. **2.** 1) $4a^2\sin\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$; 2) $2a^2\sin\alpha(\sin\alpha + 2\sqrt{\cos 2\alpha})$. Указание. Из $\Delta A_1'A_2'A_4$ $A_1'A_2' = a\sin\alpha$, $A_1'A_4 = a\cos\alpha$. Из $\Delta A_1A_1'A_4$ ($\angle A_1 = 90°$) $A_1A_1' = \sqrt{a^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha} = a\sqrt{\cos 2\alpha}$. **3.** $384\sqrt{3}$; 2) $576\sqrt{3}$. **4.** 1) $6l^2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$; 2) $2l^2\sin\dfrac{\alpha}{2}(3\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{2})$. Указание. Из $\Delta A_1'A_2A_3$: $A_2A_3 = 2l\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Из $\Delta A_1'A_1A_3$: $A_1'A_1 = \sqrt{l^2 - 4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = l\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

5. 1) $\dfrac{4l^2\sin 2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$; 2) $\dfrac{4l^2}{1+\cos^2\alpha}(\sin 2\alpha+\cos^2\alpha)$. Решение. Пусть $A_1A_2 = a$. Тогда $A_1O = A_2O = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Из $\Delta\, A_2'A_2O$: $A_2'O = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha}$. Из $\Delta\, A_2'OA_1$ $(\angle O = 90°)$ $\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha}\right)^2 = l^2$, $a = \dfrac{\sqrt{2}l\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$. Из $\Delta\, A_2A_2'O$: $A_2A_2' = \dfrac{\sqrt{2}l\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$,

$S_{бок} = \dfrac{4\sqrt{2}l\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}l\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \dfrac{4l^2\sin 2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$, $S_{полн} = \dfrac{4l^2\sin 2\alpha}{1+\cos^2\alpha} + \dfrac{4l^2\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$.

6. 1) $\dfrac{6h^2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$; 2) $\dfrac{2h^2\sin\frac{\alpha}{2}}{1+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\left(3\sqrt{1+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Решение.

Пусть $A_1A_2 = a$. Из $\Delta\, A_1A_2'A_3$: $A_2'A_3 = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ Из $\Delta\, A_3A_2'A_2$: $a^2+\dfrac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = h^2$,

$a = \dfrac{2h\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$. $S_{бок} = 3ah$, $S_{полн} = 3ah + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{2}\left(6h+a\sqrt{3}\right)$.

__Таблица 11.5.__ **1.** 76. **2.** 300. **3.** 20(1+$\sqrt{3}$). **4.** 252. Указание. $\angle\, A_3'A_3A_4 = 90°$ (по теореме о трех перпендикулярах), откуда $A_3'A_3A_4A_4'$ – прямоугольник. **5.** 108(2+$\sqrt{7}$). Решение. Через точку A_1 проведем прямую l, параллельную A_2A_3. $A_1C \perp l$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $A_1'A_1 \perp l$. Так как $A_1A_1' \parallel A_3A_3'$ и $A_2A_3 \parallel l$, то $\angle\, A_3'A_3A_2 = 90°$, т.е. $A_3'A_3A_2A_2'$ – прямоугольник. Из $\Delta\, A_1'A_1O$ $A_1O = 6\sqrt{3}$, откуда $A_1A_3 = 18$. Из $\Delta\, A_1'A_1B$ $A_1'B = \sqrt{63}$. $S_{бок} = 2\cdot 18\cdot\sqrt{63} + 12\cdot 18 = 108(2+3\sqrt{7})$. **6.** 36(2+$\sqrt{3}$). Решение. $\angle\, A_1'A_1A_2 = 90°$ (по теореме о трех перпендикулярах), откуда $A_1'A_1A_2A_3$ – прямоугольник. Из $\Delta\, A_1'A_1O$ $A_1'O = A_1O = 3\sqrt{2}$. Тогда $A_1A_4 = 6$. Из $\Delta\, A_1'OB$ $A_1'B = 3\sqrt{3}$. $A_1'B \perp A_1A_4$ (по теореме о трех перпендикулярах), тогда $S_{бок} = 2\cdot 6\cdot 3\sqrt{3} + 2\cdot 6\cdot 6 = 36(2+\sqrt{3})$.

__Таблица 11.6.__ **1.** $2\sqrt{57}$; 10. **2.** $4\sqrt{3}(15 + 16\sqrt{10})$. **3.** 426. Указание. Пусть $AA_1 = x$, $AD = y$, $AB = z$. Тогда $x^2 + y^2 = 106$, $x^2 + z^2 = 169$, $y^2 + z^2 = 225$. Сложив три уравнения, получим $2(x^2 + y^2 + z^2) = 500$, $x^2 + y^2 + z^2 = 250$, откуда $x^2 = 25$, $y^2 = 81$, $z^2 = 144$, $AA_1 = 5$, $AD = 9$, $AB = 12$. **4.** $2d^2\cos\alpha(\cos\alpha\sin\beta + 2\sin\alpha)$. Решение. Из ΔDC_1C $(\angle C = 90°)$ $C_1C = d\sin\alpha$, $CD = d\cos\alpha$. $S_{ABCD} =$

$= d^2\cos^2\alpha\sin\beta$. $S_{бок} = 4d^2\cos\alpha\sin\alpha$. **5.** $\frac{d^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}(\sin 2\beta + \cos^2\beta\cos\frac{\alpha}{2})$. Решение. Из ΔBB_1D ($\angle B = 90°$) $BD = d\cos\beta$, $B_1B = d\sin\beta$. Из ΔABD $AB = \frac{d\cos\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. $S_{ABCD} =$

$= \frac{d^2\cos^2\beta}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\sin\alpha = \frac{1}{2}d^2\cos^2\beta ctg^2\frac{\alpha}{2}$. $S_{бок} = \frac{4d\cos\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot d\sin\beta = \frac{d^2\sin 2\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

6. $2d^2(\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} + \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta})$. Решение. Из ΔBB_1D $BB_1 = d\sin\alpha$, $BD = d\cos\alpha$. Из ΔB_1C_1D $B_1C_1 = d\sin\beta$. Из ΔABD ($\angle A = 90°$) $AB = \sqrt{d^2\cos^2\alpha - d^2\sin^2\beta}$. $S_{ABCD} = d^2\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$. $S_{бок} = 2d^2\sin\alpha(\sin\beta + \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta})$.

Таблица 11.7. **1.** Указание. Через точку P провести прямую, параллельную KF. Она пересекает отрезок A_2A_2' в точке M. $KMPF$ – искомое сечение. **2.** Указание. Прямая KF пересекает прямую A_2A_3 в точке B. Прямая BP пересекает A_1A_3 в точке M. $KPMF$ – искомое сечение. **3.** Указание. Прямые KF и KP пересекают прямые A_1A_2 и A_2A_3 в точках B и C соответственно. Прямая BC пересекает отрезки A_1A_4 и A_3A_4 в точках D и E соответственно. $KPEDF$ – искомое сечение. **4.** Указание. Через точки K и P проведем прямую, пересекающую прямые A_1A_1' и $A_1'A_4'$ в точках B и A соответственно. Через точки A и F проведем прямую, пересекающую прямые $A_4'A_3'$ и $A_1'A_2'$ в точках M и C соответственно. Прямая BC пересекает A_1A_2 и A_2A_2' в точках N и E соответственно. $NEFMPK$ – искомое сечение.

Таблица 11.8. **1.** 54. **2.** 48. Указание. $S_{бок} = \frac{S_{ABCD}}{\cos 60°}$. **3.** 336. Указание. Из ΔSOC $OC = \sqrt{72}$. Тогда $CD = 12$. Проведем $SE \perp CD$. Из ΔSEC $SE = 8$. **4.** $\frac{3a}{2}\left(2\sqrt{4b^2 - a^2} + a\sqrt{3}\right)$. Указание. Провести $SK \perp CD$. Из ΔSCK $SK = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$. **5.** $\frac{3\sqrt{3}h^2\cos\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$. Указание. Из ΔSOE $OE = h\mathrm{ctg}\alpha$. Из ΔABC $AC = 2\sqrt{3}\,OE$. $S_{бок} = \frac{S_{ABC}}{\cos\alpha}$. **6.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \sqrt{4ctg^2\alpha + 1}\right)$. Указание.

Из ΔABC $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $OE = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Из ΔSOA $SO = AO\,\mathrm{ctg}\alpha$. Из ΔSOE $SE = \sqrt{SO^2 + OE^2}$.

<u>Таблица 11.9.</u> **1.** $8(\sqrt{3}+\sqrt{6})$. Указание. $S_{бок} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos 45°}$. **2.** $8(11+3\sqrt{2})$. **3.** 5. Указание. Т.к. $SA = SB = SC$, то $OA = OB = OC$, т.е. точка O – центр окружности, описанной около ΔABC. Тогда $AO = \dfrac{AB}{2\sin 150°}$. **4.** $3\sqrt{7}$. Решение. Из ΔSAO $AO = 4$. Из ΔABC по теореме синусов $AO = R = \dfrac{BC}{2\sin BAC}$, откуда $\sin BAC = \dfrac{3}{4}$. Тогда $\cos BAC = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Из ΔABD $AD = AB\cos BAD = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}$, $AC = 2AD = 3\sqrt{7}$. **5.** $39(1+\sqrt{2})$. Указание. $OE = r = 0{,}5\sqrt{AB\cdot CD} = 3$. $SO = OE = 3$. $S_{ABCD} = (9+4)\cdot 3 = 39$. $S_{бок} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos 45°}$. **6.** $\dfrac{a^2 \sin 2\alpha \cos^2 \frac{\beta}{2}}{2\cos\beta}$. Указание. Из ΔABC $AC = a\cos\alpha$. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a^2\cos\alpha\sin\alpha = \dfrac{1}{4}a^2\sin 2\alpha$. Так как O – точка пересечения биссектрис ΔABC, то точка O – центр окружности, вписанной в ΔABC. Тогда $S_{бок} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos\beta}$.

<u>Таблица 11.10.</u> **1.** 252. Указание. Провести $SD \perp CB$. Из ΔADB $AD = 12$, из ΔSAD $SA = 15$. **2.** $18(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$. Указание. Из ΔABC $AC = 6\sqrt{3}$, $AB = 12$. Из ΔSAC $SA = 6\sqrt{3}$, $CS = 6\sqrt{6}$. $\angle SCB = 90°$ (по теореме о трех перпендикулярах). **3.** $48(1+\sqrt{3})$. **4.** $36(3+2\sqrt{3})$. Указание. Из ΔABC $AB = 12\sqrt{3}$. Из ΔACD $AD = AC\sin 60° = 6\sqrt{3}$. Из ΔSAD $SA = 6$, $CD = 12$. **5.** $18(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$. Решение. Пусть $SA = a$, тогда $AB = CD = a$, $SD = 2a$. Из ΔSDC ($\angle D = 90°$) $4a^2 + a^2 = 36\cdot 5$, $a = 6$. $SA = AB = 6$, $AD = 6\sqrt{3}$, $SB = 6\sqrt{2}$, $SD = 12$. $S_{полн} = 36\sqrt{3} + 18\sqrt{3} + 36 + 18\sqrt{6} + 18 = 54\sqrt{3} + 18\sqrt{6} + 54$. **6.** $l^2(\cos^2\alpha + 0{,}5\sin 2\alpha + \cos\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha})$. Решение. Из ΔSCB ($\angle B = 90°$) $SB = l\sin\alpha$, $BC = l\cos\alpha$. Из ΔSAB $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = l\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} =$ $= l\sqrt{-\cos 2\alpha}$. $S_{полн} = l^2\cos^2\alpha + 0{,}5l^2\sin\alpha\cos\alpha + 0{,}5l^2\sin\alpha\cos\alpha +$ $+ 0{,}5l^2\sqrt{-\cos 2\alpha}\cos\alpha + 0{,}5l^2\sqrt{-\cos 2\alpha}\cos\alpha$. Замечание. Так как $SB > AB$, $AB = BC$, то $SB > BC$. Из ΔSBC ($\angle B = 90°$) $\mathrm{tg}\alpha > 1$, откуда $\alpha > 45°$, $2\alpha > 90°$, и $-\cos 2\alpha > 0$.

Таблица 11.11. **1.** $10(29+\sqrt{61})$. Указание. Из ΔSOC $SO = 12$. Проведем $OE \perp AB$. Из ΔSOE $SE = 2\sqrt{61}$. $\angle SDA = \angle SCB = 90°$ (по теореме о трех перпендикулярах). **2.** $24(1+2\sqrt{3})$. Указание. Из ΔSOD $OD = 2\sqrt{3}$. Из ΔOCD ($\angle D = 90°$, $\angle C = 60°$) $OC = 4$, откуда $AC = 8$. $S_{ABC} = 16\sqrt{3}$. $S_{SBC} = S_{SAB}$. ΔOBC – ортогональная проекция ΔSBC на плоскость ABC. Тогда $S_{SAB} +$

$$+ S_{SBC} = \frac{S_{ABC}}{\cos 60°} = 16\sqrt{3}\cdot 2 = 32\sqrt{3}.\ S_{ASC} = 24.\ \mathbf{3.}\ 36(4+2\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{15}).$$

Указание. Из ΔABC $AB = 24$, $BC = 12\sqrt{3}$. $AO = OB = 12$. Из ΔSOB $SO = 12$, $SB = 12\sqrt{2}$. Проведем $SD \perp BC$ и $SE \perp AC$. Тогда D и E – середины сторон BC и AC соответственно. Из ΔSDB $SD = \sqrt{SB^2 - DB^2} = 6\sqrt{5}$. Из ΔSEC $SE = 6\sqrt{7}$. **4.** $14\sqrt{23}$. **5.** $5\sqrt{3}+18\sqrt{2}$. **6.** $99\sqrt{3}$. Указание. Проведем $CE \perp A_1B$. CE – высота усеченной пирамиды. $BE = r_1 - r_2 = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$, где r_1 и r_2 – радиусы окружностей, вписанных в $\Delta A_1A_2A_3$ и $\Delta A_1'A_2'A_3'$ соответственно. Из ΔCBE $CB = 2$. CB – высота боковой грани усеченной пирамиды.

Таблица 11.12. **1.** Указание. Т.к. $PM \parallel AB$, то плоскость сечения пересекает плоскость ABC по прямой KE, параллельной AB. **2.** Указание. Провести прямую MK до пересечения с прямой AC (точка D). Прямая DP пересекает AB в точке E. $PKME$ – искомое сечение. **3.** Указание. Провести прямую MP до пересечения с прямой DC (точка F). Прямая FK пересекает прямые AD и BC в точках E и T соответственно. Прямая TM пересекает прямую SB в точке N. $KNMPE$ – искомое сечение. **4.** Указание. Проведем прямые KP и MK до пересечения с прямыми CD и AD в точках E и F соответственно. Прямая EF пересекает прямую BC в точке T. Прямая TP пересекает прямую SB в точке L. $MKPL$ – искомое сечение.

Таблица 11.13. **2.** $18\sqrt{6}$. Указание. Из ΔOEO_1 $OE = 3\sqrt{2}$. Из ΔCOE $CE = 3\sqrt{6}$. $DC = 2CE = 6\sqrt{6}$. **3.** 3. Указание. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра OE к отрезку CD. **4.** $\dfrac{l\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; $\dfrac{l\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

Решение. Проведем $O_1E \perp CD$. Из ΔO_1DE $DE = l\sin\dfrac{\beta}{2}$. Из ΔODE ($\angle D = 90°$)

$OD = R = \dfrac{l\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Из ΔO_1OD $OO_1 = h = \dfrac{l}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}$.

5. $4R^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\beta$. Решение. Из $\Delta C_1O_1D_1$ $C_1D_1 = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Из ΔCD_1D ($\angle D = 90°$) $DD_1 = CD\mathrm{tg}\beta = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\beta$. $S_{CC_1D_1D} = 4R^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\beta$. **6.** $\dfrac{2d^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta}{1+4\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha\,\mathrm{ctg}^2\,\beta}$. Решение. Пусть $OO_1 = a$. Из ΔOO_1E $OE = a\mathrm{ctg}\alpha$. Из ΔOCE $CE = OE\mathrm{ctg}\beta$. $CD = 2CE = 2a\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta$. Из ΔCC_1D $a^2 + 4a^2\mathrm{ctg}^2\alpha\mathrm{ctg}^2\beta = d^2$. $a^2 = \dfrac{d^2}{1+4\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha\,\mathrm{ctg}^2\,\beta}$.

$S_{CC_1D_1D} = 2a^2\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta = \dfrac{2d^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta}{1+4\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha\,\mathrm{ctg}^2\,\beta}$.

Таблица 11.14. **2.** 25π. **3.** $45°$. Решение. Из ΔCOE $OE = 8\sqrt{3}$. Из ΔSOE $\mathrm{tg}SEO = 1$, $\angle SEO = 45°$. **4.** $9\sqrt{15}$. Решение. Из ΔABC ($\angle A = 90°$) $CB = 12$, тогда $OC = 6$. Из ΔSOC $SC = 12$. Проведем $SE \perp AC$. Из ΔSEC $ES = \sqrt{SC^2 - EC^2} = 3\sqrt{15}$. $S_{ASC} = 9\sqrt{15}$. **5.** $\dfrac{h^2\sin\alpha}{2\sin^2\beta}$. **6.** $\dfrac{m^2}{2\sin 2\alpha}$.

Таблица 11.15. **1.** $l\sin\alpha\sin\beta$; $l\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\beta}$. Решение. Из ΔSBD ($\angle D$=90°) $SB = l\sin\alpha$. Из ΔSOD $SO = l\sin\alpha\sin\beta$. Из ΔSOC $OC = \sqrt{SC^2 - SO^2}$.

2. $\dfrac{2a^2 tg\alpha}{\sin\beta\sin 2\beta}$. Решение. Из ΔODE $OE = \dfrac{a}{\sin\beta}$. Из ΔSOE $SE = \dfrac{a}{\sin\beta\cos\beta} = \dfrac{2a}{\sin 2\beta}$. Из ΔCOE $CE = OE\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sin\beta}$. $S_{BSC} = \dfrac{2a^2 tg\alpha}{\sin\beta\sin 2\beta}$.

3. $\dfrac{h\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\alpha}}$. Решение. Пусть $SB = x$. Из ΔSBD $SD = x\cos\alpha$, $BD = x\sin\alpha$.

Из ΔOBD ($\angle D$=90°) $OD = BD\mathrm{ctg}\dfrac{\beta}{2} = x\sin\alpha\mathrm{ctg}\dfrac{\beta}{2}$. Из ΔSOD $x^2\sin^2\alpha\mathrm{ctg}^2\dfrac{\beta}{2} + h^2 = x^2\cos^2\alpha$, откуда $x = \dfrac{h}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\, ctg^2\frac{\beta}{2}}} = \dfrac{h}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\left(1+ctg^2\frac{\beta}{2}\right)}} =$

$= \dfrac{h\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\alpha}}$. **4.** 30; $6\sqrt{3}$. Указание. Провести $B_1C \perp OB$. **5.** $108\sqrt{3}$. Решение. Проведем $B_1D \perp BC$. Из ΔB_1DB $B_1D = 6\sqrt{3}$, $DB = 6$. Тогда $CD = 18$.

$S_{CC_1B_1B} = CD \cdot B_1D = 108\sqrt{3}$. **6.** $0{,}5m^2\sin 2\alpha$. Проведем $B_1D \perp BC$. Из ΔCB_1D $B_1D = m\cos\alpha$, $CD = m\sin\alpha$. $S_{CC_1B_1B} = CD \cdot B_1D = m^2\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}5m^2\sin 2\alpha$.

Таблица 11.16. **1.** 144π. **3.** $\dfrac{m\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Решение. Из ΔAOB $AO = \dfrac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Из ΔAO_1O $AO_1 = \dfrac{m\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **4.** 4. Указание. Радиус r окружности, вписанной в ΔABC ($\angle B = 90°$) находится по формуле: $r = \dfrac{AB + BC - AC}{2}$. **5.** $5\sqrt{26}$. Указание. Из ΔABC $O_1C = \dfrac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}}$. 6. $\sqrt{R^2 - \dfrac{m^2}{4\sin^2\alpha}}$. Указание. Из ΔABC $O_1A = \dfrac{m}{2\sin\alpha}$.

Таблица 11.17. **1.** $\dfrac{m}{1+\cos\alpha}$. Решение. Проведем биссектрису DO_1 угла SDO (точка O_1 лежит на SO). Тогда OO_1 – радиус шара, вписанного в пирамиду. Из ΔOMD $OD = \dfrac{m}{\sin\alpha}$. Из ΔOO_1D $O_1D = OD\text{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{m\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{m}{1+\cos\alpha}$. **2.** 3. Решение. SO – медиана равнобедренного ΔASC, откуда $SO \perp AC$. Аналогично, $SO \perp BD$. Значит, SO – высота пирамиды. Из ΔOCD ($OC = OD = 6$) $OE = 3\sqrt{3}$. Проведем EO_1 – биссектрису угла SEO (точка O_1 лежит на SO). Тогда O_1 – центр вписанного шара. Из ΔO_1OE $OO_1 = OE\text{tg}30° = 3$. **3.** $2\sqrt{7}$. Решение. Из ΔABC $MB = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. Центр описанного шара – точка O_1 – середина отрезка MM_1. $O_1M = 4$. Из ΔO_1MB

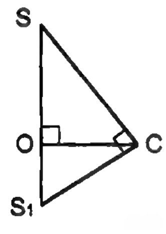


Рис.3.

$O_1B = \sqrt{O_1M^2 + MB^2} = 2\sqrt{7}$. **4.** 4. Решение. Продлим высоту SO пирамиды до пересечения с поверхностью шара (точка S_1). Тогда SS_1 – диаметр шара, откуда $\angle SCS_1 = 90°$ (рис.3). Из ΔSOC $SC = 4\sqrt{3}$. Из ΔSCS_1 $SS_1 = 8$. **5.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3\sin 2\alpha}$. Указание. Из ΔABC $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Продлим высоту SO пирамиды до пересечения с поверхностью шара (точка S_1). Тогда SS_1 – диаметр шара. **6.** $10\sqrt{3}$. Решение. $OC = 12\sqrt{2}$. Из ΔSOE $SO = OE\text{tg}60° = 12\sqrt{3}$. Рассмотрим ΔSCS_1

(рис.3), SS_1 – диаметр шара. $OC^2 = SO \cdot OS_1$, тогда $S_1O = 8\sqrt{3}$, а $SS_1 = 8\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$.

Таблица 11.18. **1.** $250\sqrt{3}$. Решение. Из ΔBB_1D $BB_1 = BD = 10$. Из ΔBCD $CD = 5$, $BD = 5\sqrt{3}$. $V = 5 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 10 = 250\sqrt{3}$. **2.** $144\sqrt{3}$. Решение. Из ΔAA_1C $AC = 6\sqrt{3}$, $AA_1 = 6$. Из ΔBB_1D $BD = \sqrt{B_1D^2 - BB_1^2} = 8$. $ABCD$ – ромб. Тогда $S_{ABCD} = 0{,}5 \cdot AC \cdot BD = 24\sqrt{3}$. $V = 24\sqrt{3} \cdot 6 = 144\sqrt{3}$. **3.** $48\sqrt{3}$. **4.** $\dfrac{a^3 \sin^2\gamma \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$. Решение. Из ΔAA_1C $AA_1 = a\cos\gamma$, $AC = a\sin\gamma$. Из ΔABC $\dfrac{AC}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{BC}{\sin\alpha}$, откуда $BC = \dfrac{a\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$. $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = BC \cdot AC \cdot \sin\beta = \dfrac{a^2\sin^2\gamma\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $V = \dfrac{a^3\sin^2\gamma\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$.

5. $d^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}$. Указание. Из ΔAB_1D $AD = d\cos\alpha$, $AB_1 = d\sin\alpha$. Из ΔDB_1C $CD = d\cos\beta$. Из ΔABB_1 $BB_1 = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = d\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}$. **6.** $a^3\sin2\alpha\cos\alpha$.

Таблица 11.19. **1.** 840. **2.** $96\sqrt{3}$ **3.** 80. Указание. Т.к. $A_1A_2 = A_2A_3$, то $\angle A_2A_1A_3 = \angle A_2A_3A_1 = \angle A_3A_1A_4 = 30°$. Тогда $\angle A_2A_1A_4 = 60°$. Из $\Delta A_1A_3A_4 = A_1A_4 = 2\sqrt{3}$, $A_3A_4 = 2$. Проведем $A_2B \perp A_1A_4$. Из ΔA_1A_2B $A_1B = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, тогда $A_2A_3 = 2\sqrt{3} - \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. **4.** $abc\sin\alpha$. **5.** $180\sqrt{2}$. **6.** $3\sqrt{3}\,a^3\cos^2\alpha\sin\alpha$. Решение. Из $\Delta A_1'BO$ $OB = a\cos\alpha$, $A_1'O = a\sin\alpha$. Тогда $A_1A_2 = 2\sqrt{3}\,a\cos\alpha$, $V = \dfrac{12a^2\cos^2\alpha \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot a\sin\alpha = 3\sqrt{3}\,a^3\cos^2\alpha\sin\alpha$.

Таблица 11.20. **1.** $180\sqrt{3}$. Указание. $A_1O = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12$. **2.** $48\sqrt{3}$. Указание. Из ΔA_1A_2B $A_1B = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Тогда $S_{A_1A_2A_3} = 48$, $OB = \frac{2 \cdot 48}{10+10+12} = 3$. Из ΔSOB $SO = 3\sqrt{3}$. **3.** 54. Указание. O – центр окружности, описанной около $\Delta A_1A_2A_3$. Тогда $A_1O = \dfrac{6}{2\sin30°} = 6$, $SO = 6\sqrt{3}$. **4.** $\dfrac{1}{6}a^3\sin2\alpha\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. Указание. Из ΔOA_3A_4 $OA_3 = a\cos\alpha$, из ΔOA_3B $OB = a\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}a\sin2\alpha$.

Тогда $SO = \frac{1}{2}a\sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta$. **5.** $\frac{4}{3}l^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}$. Указание. Из ΔSA_3A_4 $A_3A_4 = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$, из ΔA_1SA_4 $A_1A_4 = 2l\sin\frac{\beta}{2}$. Тогда $OA_3 =$ $= l\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}}$. Из ΔSOA_3 $SO = l\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}$. **6.** $\frac{1}{6}a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta$. Указание. Проведем $A_4C \perp A_1A_2$. $A_4C = a\sin\alpha$, тогда $OB = 0{,}5a\sin\alpha$, $SO = 0{,}5a\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$. $S_{A_1A_2A_3A_4} = a^2\sin\alpha$.

Таблица 11.21. **1.** $3\sqrt{6}$. **2.** $36\sqrt{2}$. Указание. Из ΔA_1SA_5 $A_1S = 6$. Из $\Delta A_1A_5A_6$ $A_1A_6 = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. Из ΔA_1SO $SO = 2\sqrt{6}$. **3.** $\frac{1}{3}h^3\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\sin\gamma$.

4. $\frac{2}{3}l^3\frac{\sin^2\beta\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}}{\sin\alpha}$. Решение. Из ΔSA_1O $A_1O = l\cos\beta$, $SO = l\sin\beta$. Из ΔSOA_3 $OA_3 = l\sin\beta\operatorname{ctg}\alpha$, $SA_3 = \frac{l\sin\beta}{\sin\alpha}$. Из ΔA_1SA_4 ($\angle A_4 = 90°$) $A_1A_4 = l\sqrt{1-\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}} = \frac{l}{\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}$. $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{l}{\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}\times$ $\times 2l\sin\beta\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot l\sin\beta = \frac{2}{3}l^3\frac{\sin^2\beta\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}}{\sin\alpha}$. **5.** $\frac{1}{3}l\times$ $\left(l^2\cos^2\beta-a^2\right)\operatorname{tg}\alpha\sin\beta$. Решение. Из ΔSA_2O $SO = l\sin\beta$, $OA_2 = l\cos\beta$, тогда $A_1A_2 = 2l\cos\beta$. Проведем $A_4B \perp A_1A_2$. Из ΔA_1BA_4 $A_4B = (l\cos\beta - a)\operatorname{tg}\alpha$. $V = \frac{1}{3}(l\cos\beta+a)(l\cos\beta-a)\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot l\sin\beta = \frac{1}{3}l\left(l^2\cos^2\beta-a^2\right)\operatorname{tg}\alpha\sin\beta$.

6. $\frac{2}{3}m^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. Решение. Т.к. $SA_1 = SA_2 = SA_3$, то $OA_1 = OA_2 = OA_3$, откуда O – центр окружности, описанной около $\Delta A_1A_2A_3$ и $\angle A_1A_2A_3 = 90°$. OB – средняя линия треугольника, тогда $A_1A_2 = 2m$, $A_2A_3 = 2m\operatorname{tg}\alpha$. Из ΔSOB $SO = m\operatorname{tg}\beta$. $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}4m^2\operatorname{tg}\alpha\cdot m\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}m^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

Таблица 11.22. **1.** $\frac{1}{12}a^3\operatorname{ctg}\alpha$. Решение. $A_1O = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Из ΔA_1SO $SO = \frac{a}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\alpha$. $V = \frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a^3\operatorname{ctg}\alpha}{12}$. **2.** $-\frac{4}{3}\cdot\frac{h^3\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$. Решение. Пусть $A_3A_4 = a$. Проведем $SB \perp A_3A_4$. Из ΔSA_4B $SB = 0{,}5a\operatorname{tg}\alpha$. Из ΔSOB

$h^2+\frac{a^2}{4}=\frac{1}{4}a^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$, откуда $a=\dfrac{2h\cos\alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}}$. $V=\frac{1}{3}\cdot\dfrac{4h^3\cos^2\alpha}{-\cos 2\alpha}$. Замечание. Поскольку $\angle A_4SA_3<\angle A_4OA_3$, то $\angle A_4SA_3<90°$, тогда $\alpha>45°$ и $\cos 2\alpha<0$.

3. $\dfrac{l^3\sqrt{12+3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}\;\mathrm{tg}\,\alpha}{\left(4+\mathrm{tg}^2\,\alpha\right)^2}$. Решение. Пусть $A_1A_3=a$, тогда $OB=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$, $AO=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Из ΔSOB $SO=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}\mathrm{tg}\alpha$. Из ΔSOA_1 $\frac{1}{12}a^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha+\frac{1}{3}a^2=l^2$, откуда $a=\dfrac{2\sqrt{3}l}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\alpha+4}}$. $V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\sqrt{3}}=\dfrac{a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{24}$. **4.** $126\sqrt{3}$. Решение. Пусть O и O_1 – центры нижнего и верхнего оснований усеченной пирамиды соответственно. Проведем $A_1'C\perp A_1B$. $A_1C=R-R_1=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$, где R и R_1 – радиусы окружностей, описанных около нижнего и верхнего оснований соответственно. Из $\Delta A_1\,A_1'C$ $A_1'C=6$. $V=\dfrac{1}{3}\cdot 6(36\sqrt{3}+9\sqrt{3}+18\sqrt{3})=$ $=126\sqrt{3}$. **5.** $\dfrac{1}{3}l\sin\alpha(3a^2+6al\cos\alpha+4l^2\cos^2\alpha)$. Решение. Проведем $B_1C\perp OB$. Из ΔB_1BC $B_1C=l\sin\alpha$, $BC=l\cos\alpha$, $A_1A_4=a+2l\cos\alpha$. $V=\frac{1}{3}\cdot l\sin\alpha\times$ $\times\left(a^2+\left(a+2l\cos\alpha\right)^2+a\left(a+2l\cos\alpha\right)\right)=\dfrac{1}{3}\cdot l\sin\alpha(3a^2+6al\cos\alpha+4l^2\cos^2\alpha)$.

6. $\dfrac{1}{24}(a^3-b^3)\mathrm{tg}\alpha$. Решение. Проведем $B_1C\perp A_2B$. $BC=r-r_1$, где r и r_1 – радиусы окружностей, вписанных в нижнее и верхнее основания усеченной пирамиды соответственно. $BC=\dfrac{(a-b)\sqrt{3}}{6}$. Из ΔBB_1C $B_1C=\dfrac{(a-b)\sqrt{3}}{6}\mathrm{tg}\alpha$. V $=\dfrac{1}{18}(a-b)\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\alpha\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}+\dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}+\dfrac{ab\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{1}{24}\left(a^3-b^3\right)\mathrm{tg}\alpha$.

<u>**Таблица 11.23.**</u> **1.** $64\sqrt{3}\,\pi$; $32\sqrt{3}\,\pi$. **2.** 9000π; $600\sqrt{3}\,\pi$. **3.** $\dfrac{3200\sqrt{3}}{3}\pi$; $\dfrac{640\sqrt{3}}{3}\pi$. **4.** $\pi\, l^3\left(\sin^2\beta\cos^2\alpha+\cos^2\beta\right)\sin\alpha\sin\beta$; $2\pi\, l^2\sin\alpha\sin\beta\times$ $\times\sqrt{\sin^2\beta\cos^2\alpha+\cos^2\beta}$. **5.** $0{,}5\pi Q\sqrt{2Q\mathrm{ctg}\alpha}$; $2\pi Q$. Указание. $CD=2R$, тогда из ΔCD_1D $D_1D=2R\mathrm{tg}\alpha$. $4R^2\mathrm{tg}\alpha=Q$, откуда $R=\sqrt{0{,}5Q\mathrm{ctg}\alpha}$, $DD_1=H=$

$= \sqrt{2Qtg\alpha}$ **6.** $2\sqrt{2}\ \pi\, a^3\mathrm{tg}\alpha$; $4\pi\, a^2\mathrm{tg}\alpha$. Указание. Т.к. CD – диаметр, то $\angle CAD = 90°$.

Таблица 11.24. **1.** 24π; $8\sqrt{3}\ \pi$. **2.** $\frac{1}{3}\pi\, l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$; $\pi\, l^2\cos\alpha$. **3.** 720π; $36\sqrt{41}\ \pi$. Указание. $\Delta A_1SO_1 \sim \Delta ASO$. **4.** $\frac{\pi Q\sqrt{Q}}{3\cdot\sqrt[4]{3}}$; $\frac{2\pi Q\sqrt{3}}{3}$. **5.** $\frac{74\sqrt{3}}{3}\pi$; $7\sqrt{37}\ \pi$. **6.** 1) $32\sqrt{3}\ \pi$; $24\sqrt{5}\ \pi$; 2) 36π; $18\sqrt{5}\ \pi$. Указание. 2) Пусть $SO = h$, тогда из ΔSOD $OD = h$, $SD = h\sqrt{2}$. Из ΔCOD ($\angle D = 90°$) $OC = 2OD = 2h$, $CD = h\sqrt{3}$. Из ΔSDB $3h^2 + 2h^2 = 45$, $h = 3$.

Таблица 11.25. **1.** $\frac{\pi a^3\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$; $\frac{\pi a^2}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$. Указание. Из ΔCOB $OB = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Из ΔSCB $SB = \frac{a}{2\sin\frac{\beta}{2}}$. Из ΔSOB $SO = \frac{a\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$.

2. $\frac{1}{3}\pi l^3\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}\right)^2\sqrt{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$; $\pi l^2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}}$. Указание. $\angle DCB = 90°$. **3.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3 - 4\cos^2\alpha}}{18\sqrt{3}\cos\alpha}$; $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{b\cos\alpha}$. Указание. $OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Из ΔESC $SC = \frac{a}{2\cos\alpha}$. Из ΔSOC $SO = \sqrt{\frac{a^2}{4\cos^2\alpha} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{2\cos\alpha}\sqrt{\frac{3 - 4\cos^2\alpha}{3}}$.

4. $\frac{784\sqrt{3}\pi}{3}$; 128π. Указание. Проведем $B_1C \perp OB$. $CB = 4$. Из ΔB_1CB $B_1C = 4\sqrt{3}$, $B_1B = 8$. **5.** $63\sqrt{3}\ \pi$; 54π. Указание. Из ΔCB_1B $CB = 12$, $CB_1 = 6\sqrt{3}$. Проведем $B_1D \perp BC$. Из ΔBB_1D $BD = 3$, $B_1D = 3\sqrt{3}$. $B_1O_1 = 6 - 3 = 3$.

6. $\frac{\pi l^3\sin\beta}{12\sin^2\alpha}\left(3\sin^2\beta\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\beta\right)$; $\pi\, l^2\sin\beta\,\mathrm{ctg}\alpha$. Указание. Из ΔCB_1B $BC = \frac{l\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$, тогда $OB = \frac{l\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$. Проведем $B_1D \perp BC$. Из ΔBB_1D $B_1D = l\sin\beta$, $BD = l\cos\beta$, тогда $O_1B_1 = \frac{l\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha} - l\cos\beta = \frac{l\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha}$.

Таблица 11.26. **1.** $256\sqrt{3}\pi$; 192π. **2.** $32\sqrt{3}\pi$; 48π. Указание. Из ΔABC $O_1B = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. **3.** $\dfrac{500}{3}\pi$; 100π. Указание. $OD = \dfrac{2S_{ABC}}{AB + BC + AC}$. **4.** $\dfrac{1984}{3}\pi$; 208π. **5.** $964\dfrac{1}{3}\pi$; 220π. Указание. Объем шарового кольца найдем как разность объема шара и суммы объемов двух шаровых сегментов, высоты которых равны 6 и 3. Аналогично находится площадь сферической части шарового кольца. **6.** 1734π; 306π.

Оглавление

Предисловие. 3
Повторение курса планиметрии 5
Таблица 1. Решение треугольников 5
Таблица 2. Площадь треугольника 6
Таблица 3. Площадь четырехугольника 7
Таблица 4. Площадь четырехугольника 8
Стереометрия. 10 класс. 9
Таблица 10.1. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия ... 9
Таблица 10.2. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия . 10
Таблица 10.3. Параллельность прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые 11
Таблица 10.4. Параллельность прямых и плоскостей 12
Таблица 10.5. Признак параллельности плоскостей 13
Таблица 10.6. Свойства параллельных плоскостей 14
Таблица 10.7. Изображение пространственных фигур на плоскости 15
Таблица 10.8. Изображение пространственных фигур на плоскости 16
Таблица 10.9. Перпендикулярность прямой и плоскости 17
Таблица 10.10. Перпендикулярность прямой и плоскости 18
Таблица 10.11. Перпендикуляр и наклонная. 19
Таблица 10.12. Перпендикуляр и наклонная 20
Таблица 10.13. Теорема о трех перпендикулярах 21
Таблица 10.14. Теорема о трех перпендикулярах 22
Таблица 10.15. Теорема о трех перпендикулярах 23
Таблица 10.16. Перпендикулярность плоскостей 24
Таблица 10.17. Перпендикулярность плоскостей 25
Таблица 10.18. Расстояние между скрещивающимися прямыми 26
Таблица 10.19. Декартовы координаты в пространстве 27
Таблица 10.20. Угол между скрещивающимися прямыми 28
Таблица 10.21. Угол между прямой и плоскостью 29
Таблица 10.22. Угол между плоскостями 30
Таблица 10.23. Площадь ортогональной проекции многоугольника 31
Таблица 10.24. Векторы в пространстве 32
Стереометрия. 11 класс 33
Таблица 11.1. Двугранный угол. Трехгранный угол 33
Таблица 11.2. Прямая призма 34
Таблица 11.3. Правильная призма 35
Таблица 11.4. Правильная призма 36
Таблица 11.5. Наклонная призма 37
Таблица 11.6. Параллелепипед 38

Таблица 11.7. Построение сечений призмы 39
Таблица 11.8. Правильная пирамида 40
Таблица 11.9. Пирамида.. 41
Таблица 11.10. Пирамида.. 42
Таблица 11.11. Пирамида. Усеченная пирамида 43
Таблица 11.12. Построение сечений пирамиды............................ 44
Таблица 11.13. Цилиндр.. 45
Таблица 11.14. Конус 46
Таблица 11.15. Конус. Усеченный конус.. 47
Таблица 11.16. Шар.. 48
Таблица 11.17. Вписанный и описанный шар................................ 49
Таблица 11.18. Объем параллелепипеда.. 50
Таблица 11.19. Объем призмы.. 51
Таблица 11.20. Объем пирамиды 52
Таблица 11.21. Объем пирамиды 53
Таблица 11.22. Объем пирамиды. Объем усеченной пирамиды 54
Таблица 11.23. Объем и площадь боковой поверхности цилиндра .. 55
Таблица 11.24. Объем и площадь боковой поверхности конуса....... 56
Таблица 11.25. Объем конуса. Объем усеченного конуса. Площадь боковой поверхности конуса. Площадь боковой поверхности усеченного конуса................................ 57
Таблица 11.26. Объем шара. Площадь поверхности шара................ 58
Ответы, указания, решения **59**